कोलाहल, अपूर्णमित
आणि
स्वयंसंघटन

लोकोपयोगी विज्ञान

कोलाहल, अपूर्णमित आणि स्वयंसंघटन

निसर्गातील व्यामिश्रतेसंबंधी नवा दृष्टिकोन

अरविंद कुमार

अनुवाद

चिंतामणी देशमुख

चित्रे

आनंद घैसास



नॅशनल बुक ट्रस्ट, इंडिया

ISBN 81-237-3471-9

2001 (शके 1922)

Chaos, Fractals and Self-organisation (Marathi)

रु. 50.00

संचालक, नॅशनल बुक ट्रस्ट, इंडिया, ए-5, ग्रीन पार्क,
नवी दिल्ली - 110016 यांनी प्रकाशित केले.

कोलाहलीय अस्तित्वातील
अनोखे कर्षक
शोभा, नीरज आणि वर्षा
यांस

अनुक्रमणिका

प्रस्तावना

गेली दहा-एक वर्षे मी अरेषीय विज्ञानातील नव्या संकल्पनांमध्ये थोड्या प्रमाणात, पण सातत्याने रस घेत आहे. हा रस निर्माण होण्याचे कारण अनेक वर्षांपूर्वी घडले. मुंबई विद्यापीठातील माझ्या एका सहकाऱ्याने इल्या प्रिगोजिन यांच्या असंतुलित ऊष्मागतिकीवरच्या भाषणांची टिपणे मला वाचायला दिली. काही वर्षांनंतर एका पदव्युत्तर विद्यार्थ्याबरोबर एका अरेषीय संहतीवर थोडेसे संशोधन केल्यामुळे हा रस वाढला. परंतु या विषयाशी एवढ्यापुरताच संबंध आल्याने मी काही त्यातील तज्ज्ञ नाही. या विषयाबद्दल खूप औत्सुक्य असणारा मी एक उपराच. तरीदेखील हे अर्ध-लोकरोचक स्वरूपाचे पुस्तक लिहिण्याची जबाबदारी मी आनंदाने स्वीकारली ती दोन कारणांसाठी. एक म्हणजे मी अधूनमधून या विषयावर जे विविध वाचन केले होते ते एकत्र गुंफण्याची संधी मला मिळाली. दुसरे म्हणजे या विषयावर जे प्रचंड लिखाण जगभरातून झाले आहे ते आपल्या देशातील अनेक सामान्य वाचकांना सहजासहजी उपलब्ध होणारे नाही. तेव्हा अशा सामान्य वाचकांपर्यंत अरेषीय विज्ञानातील थरारक, भारावून टाकणाऱ्या व गुणात्मकदृष्ट्या नवीन दृष्टिकोन देणाऱ्या कल्पना पोहोचविण्याचा प्रयत्न करायला हरकत नाही असे मला वाटले.

कोलाहलाच्या मुख्य संदेशाने या पुस्तकाची सुरूवात होते - संहतीच्या हालचालींचे नियम निश्चिततावादी असूनही भाकीतक्षमतेचा ऱ्हास होऊ शकतो! येथे नेहमीचे ठरावीक विषयच घेतले आहेत. लॉरेन्झचे कोलाहलीय हवामान, पुरवठा समीकरणानुसार होणाऱ्या प्राणिसंख्येतील अनिश्चित बदलांसंबंधीचे मे यांचे संशोधन, अरेषीय चालित लंबक, स्मेलचा घोड्याच्या नालेचा नकाशा आणि फायगनबाऊम यांची वैश्विकता. दुसऱ्या भागामध्ये अपूर्णमिताची संकल्पना, तसेच मापप्रमाण बदल आणि स्वयं-समरूपता यांच्या मुळाशी असणाऱ्या कल्पनांचा विचार केला आहे. अनेक प्रसिद्ध उदाहरणांच्या अपूर्णमितींची किंमत काढून दाखविलेली आहे. आणि अनोख्या कर्षकांची कल्पना मांडली आहे. एखाद्या कल्पनेचा गाभा गणितीय असेल तर तेथे मी गणित टाळण्याचा प्रयत्न केलेला नाही, मात्र त्याची पातळी अगदी किमान स्वरूपाची ठेवली आहे. त्यामुळे शालेय गणिताशी परिचित कोणाही व्यक्तीस ते समजण्यास कठीण पडू नये. पहिल्या दोन भागांत मांडलेल्या मूलभूत संकल्पना तिसऱ्या भागामध्ये विविध संदर्भांतील उदाहरणांद्वारे स्पष्ट केल्या आहेत. त्यानंतर ऱ्हासीय संरचना, स्वयंसंघटन इत्यादी प्रिगोजिन यांनी प्रथमच मांडलेल्या कल्पना वर्णन केल्या आहेत. कोलाहल, अपूर्णमित, आणि स्वयंसंघटन ही सर्व एकाच अंतर्गत दडलेल्या वस्तुस्थितीची भिन्न रूपे आहेत - व्यामिश्रतेची. व्यामिश्रतेबद्दलचा संक्षेपणवादी दृष्टिकोन

आणि या विषयाने संकल्पनांत घडवून आणलेल्या बदलांचा सारांश पुस्तकाच्या अखेरच्या भागात दिला आहे.

हे पुस्तक लिहिताना मी स्वत:वर एक बंधन घालून घेतले होते - यातील कोणतीही मांडणी आत्यंतिक चुकीची असू नये, मात्र प्रत्येक मांडणीबाबत असणारे अपवाद, तसेच तांत्रिक बंधने काही स्पष्टपणे नोंदण्याची गरज नाही. मी खरोखरच या तत्त्वाचे पालन करू शकलो आहे की नाही याबद्दल तज्ज्ञ मंडळींची मते ऐकायला मी उत्सुक आहे. आणि त्याचबरोबर माझे हे लिखाण सुसंगत आणि समजण्याजोगे आहे की नाही, हे सामान्य वाचकाकडून जाणण्याचीही मला उत्सुकता आहे.

ऋणनिर्देश

या विषयावर उत्कृष्ट विवेचन करणारे साहित्य उपलब्ध असून हे पुस्तक लिहिताना त्याचा खूपच उपयोग झाला आहे. या उपलब्ध साहित्याचा तपशील 'संदर्भसूची'त दिला असून प्रत्येक प्रकरणाच्या अखेर विशिष्ट संदर्भांचा ऋणनिर्देश आहे.

आनंद घैसास यांनी या पुस्तकातील आकृत्या तयार केल्या, तर निरंजन शिंपी यांनी वर्ड प्रोसेसरवर मुद्रणप्रत तयार केली. या तज्ज्ञ मदतीसाठी माझ्या या दोन सहकाऱ्यांचा मी अत्यंत आभारी आहे. वि. गो. कुलकर्णी यांनी हे काम स्वीकारण्यासाठी मला उत्तेजन दिले, आणि व्ही. माईणकर यांनी मुद्रणप्रत तपासली व उपयुक्त सूचना केल्या. यासाठी या दोघांचे आभार मानण्यात मला खूप समाधान लाभत आहे. होमी भाभा केंद्रातील माझ्या सहकाऱ्यांनी या कामात रस घेतल्याबद्दल त्यांचा पण मी आभारी आहे.

प्रास्ताविक

काही वर्षांपूर्वी एका प्रख्यात आंतरराष्ट्रीय नियतकालिकात अल्बर्ट आइन्स्टाइन यांच्यासंबंधी एक व्यंगचित्र प्रसिद्ध झाले होते. भविष्यातील कोण्या काळात दुसऱ्या ग्रहावरचा एक अंतराळवीर पृथ्वीकडे बोट करून आपल्या सहप्रवाशांना सांगत आहे 'ह्याच ग्रहावर आइन्स्टाइन राहत होता.' येथे जी अभिमानाची भावना अध्याहृत आहे ती बहुतांशी वैज्ञानिकांचीही असते. राष्ट्रांचा उदय आणि अस्त होतो, युद्धे जिंकली वा हरली जातात, परंतु मानवजातीचे खऱ्या अर्थाने टिकून राहणारे कर्तृत्व म्हणजे विज्ञानातील महान संकल्पनात्मक शोधच होत, ही ती भावना.

संकल्पनात्मक क्रांत्या हे माणसाच्या सांस्कृतिक इतिहासाचे व्यवच्छेदक लक्षण आहे, संकल्पनात्मक आणि तांत्रिक प्रगती अनेकदा बरोबरीने घडून येते. चाकाचा शोध हा जितका तांत्रिक आहे तितकाच तो संकल्पनात्मकही आहे. सुमेरियन लोकांनी जेव्हा लेखनाचा शोध लावला तेव्हा एक नवीन विचारही त्यांना गवसला - 'संदेश कोणत्याही दृश्य चिन्हांत साठवून ठेवता येतो आणि पुन्हा मिळविता येतो.' भारतीयांनी लावलेला शून्याचा शोध, एकच आकडा संख्येमध्ये त्याच्या स्थानानुसार वेगवगळी किंमत दर्शवितो ही कल्पना, अज्ञात संख्येसाठी चिन्हांचा वापर करण्याची बीजगणितातील पद्धत, हे अत्यंत उच्च दर्जाचे संकल्पनात्मक शोध आहेत.

केपलर, गॅलिलिओ आणि न्यूटन यांच्या शोधांपासून आधुनिक विज्ञान सुरू झाले. न्यूटनीय विज्ञानाला जे आश्चर्यकारक प्रचंड यश प्राप्त झाले त्यामुळे आपल्या दृष्टिकोनात दोन मूलभूत बदल घडून आले. पहिला म्हणजे घटनांच्या 'कार्यकारणभावात्मक स्पष्टीकरणा'बद्दलचा तोपर्यंत अभिप्रेत असलेला अर्थच पार बदलून गेला. न्यूटनीय विज्ञानाने 'अंतिम कार्यकारणभाव' एकदम हद्दपार केला. अंतिम कार्यकारणभाव म्हणजे अंतिम उद्दिष्ट गृहीत धरूनच कारणमीमांसा करणे. त्याऐवजी न्यूटनीय विज्ञानाने अशी अट घातली की खरे वैज्ञानिक स्पष्टीकरण 'प्रारंभ कार्यकारणभावा'वरच आधारित असले पाहिजे. यानुसार निसर्गनियम आणि प्रारंभीची स्थिती दोन्ही मिळून संहतीची हालचाल निश्चित करतात. दुसरा बदल म्हणजे तोपर्यंत अगदी अशक्य वाटणारी गोष्ट न्यूटनीय विज्ञानाने ठामपणे पुढे मांडली 'निसर्गाचे मूलभूत नियम अचूक, संख्यात्मक आणि गणितीय असतात!'

या विसाव्या शतकात तर अनेक महान संकल्पनात्मक क्रांत्या घडून आल्या आहेत. अंतर, काळ आणि वस्तुमान अचल व स्थिर असल्याची संकल्पना सापेक्षतावादाने खोटी ठरविली आहे, आणि विज्ञानातील सध्या सर्वाधिक प्रसिद्ध असलेले समीकरण ($E = mc^2$)

आपल्याला बहाल केले आहे. यापेक्षाही अधिक महत्त्वाचा होता पुंजयांत्रिकीचा उदय आणि त्यातून प्रकट झालेले अनिश्चिततेचे तत्त्व. एखाद्या संहतीचे गुणधर्म आणि हे गुणधर्म निश्चित करण्यासाठी वापरली जाणारी मोजमापप्रक्रिया ह्या दोन गोष्टी एकमेकांपासून वेगळ्या ठेवता येतात असे रूढ विज्ञानात मानले जात होते. पुंजविज्ञानाने या वेगळे ठेवले जाण्याच्या क्षमतेबाबतच प्रश्नचिन्ह उभे केले. पुंजविज्ञानाने न्यूटनीय विज्ञानाच्या जागी शक्याशक्यतेवर, संभवनीयतेवर आधारित एक विचित्र भासणारे नवीन विज्ञान स्थापित केले, आणि अणुपातळीवरील घडामोडींचे स्पष्टीकरण देण्यात त्याला प्रचंड यश लाभल्याने ते स्वीकारावेच लागले. जीवन, सजीवाची उत्पत्ती आणि अस्तित्व ही या विश्वातील सर्वात देदीप्यमान व भव्यदिव्य घटना. या घटनेला समजून घेण्याच्या आपल्या प्रयत्नांना रेण्वीय जीवशास्त्रातील शोधांनी, विशेषत: या शतकाच्या उत्तरार्धात लागलेल्या शोधांनी, प्रगतिपथावर फारच पुढे नेले आहे.

सध्या आपण विज्ञानातील आणखी एक महान क्रांती अनुभवतो आहोत. कोलाहल, अपूर्णमित, स्वयंसंघटन इत्यादी नवीन कल्पना ही क्रांती घडवीत आहेत. परंतु एका दृष्टीने ही क्रांती वेगळी आहे. या शतकातील आधीच्या महान क्रांत्या महापुरुषांनी - भौतिकी वैज्ञानिक रिचर्ड फाइनमन यांच्या शब्दांत 'प्रचंड महामनां'नी - घडवून आणल्या होत्या. (स्वत: फाइनमन हे पण एक 'प्रचंड महामन'च होते.) सापेक्षतावाद, विशेषत: व्यापक सापेक्षतावाद, तर अल्बर्ट आइन्स्टाइन यांनी जवळजवळ एकहातीच घडविला होता. पुंजसिद्धान्त एका व्यक्तीने नसला तरी जेमतेम अर्धा डझन असामान्य व्यक्तींनी आकारास आणला होता : बोर, हायझेनबर्ग, श्रोडिंगर, डिरॅक, बॉर्न आणि पाऊली. आणि या दोन्ही क्रांत्या युरोपात उदयास आल्या.

आताची ही क्रांती त्या मानाने काही फार नाट्यमय नाही. तसे या क्रांतीनेही काही महत्त्वाचे विजय मिळविले आहेत. परंतु पुंजसिद्धान्त, सापेक्षतावाद आणि रेण्वीय जीवशास्त्र यांच्याशी तुलना करता येईल असे भव्यदिव्य कर्तृत्व काही अजून तरी तिच्या गाठी नाही. कोणत्याही महान चळवळीत असतात तसे येथेही वीरपुरुष आहेत. परंतु त्यातील बहुतेक आइन्स्टाइन वा बोर यांच्या पंक्तीस बसण्याच्या योग्यतेचे नाहीत. ही क्रांती बऱ्याच मोठ्या क्षेत्रावर पसरलेली असून तिचा प्रभावही सर्वत्र सारखा नाही. या क्रांतीच्या धीम्या आगेकुचीला निरनिराळ्या देशांतील सामान्य वैज्ञानिक, शिक्षक, पदव्युत्तर विद्यार्थी अशांचा हातभार लागलेला आहे. तरीही भविष्यात विसाव्या शतकाची स्मृती ज्या गोष्टींसाठी टिकून राहील त्यातील एक ही क्रांती असेल.

सामान्य माणसासाठी सापेक्षतावाद फारच गहन व कूट विषय आहे - दुरूनच कौतुक करण्याजोगा. आणि तसे पाहता जेव्हा वस्तूंचे वेग प्रकाशाच्या प्रचंड वेगाशी तुल्यबळ होऊ लागतात तेव्हाच सापेक्षतावादाचे परिणाम जाणवू लागतात. पुंजसिद्धान्त तर सामान्य माणूस आणि तज्ज्ञ या दोघांनाही गोंधळात टाकणाराच आहे. तज्ज्ञ फक्त या गोंधळाशी जुळवून घ्यायला शिकतो! त्यात पुन्हा नेहमीच्या दैनंदिन व्यवहाराच्या पातळीवर पुंजसिद्धान्त जवळपास गैरलागूच असतो; अणू-रेणूंच्या पातळीवरच त्याचे महत्त्व विचारात घेणे भाग

पडते. याउलट कोलाहल, अपूर्णमित आणि स्वयंसंघटन आपल्या दैनंदिन व्यवहाराच्या पातळीवर सर्वत्र आढळून येतात. न्हाणीघरातील गळणारी तोटी कोलाहल स्थितीत असू शकते; आणि आपल्या श्वसनसंस्थेतील श्वासनलिकांचे जाळे एक अपूर्णमित असतो. घराच्या बागेतील किड्यांच्या संख्येतील बदल कोलाहलीय असतात. आणि आपल्या घरी वा शेजारी जन्माला येणारे बालक म्हणजे निसर्गातील स्वयंसंघटनाचे अप्रतिम उदाहरणच. हा विषय सर्वांनाच भिडणारा आहे. रूढ विज्ञानाने भौतिकी, रसायन, प्राणिशास्त्र, वनस्पतिशास्त्र, भूशास्त्र अशा औपचारिक विषयांच्या कप्प्यांत निसर्गाचे विभाजन केले आहे. या कृत्रिम सीमारेषा नव्या विज्ञानात अस्तित्वात नाहीत. येथील मूलभूत मर्मदृष्टी सर्वच विषयांत सारखीच कामी येते. कोलाहल, अपूर्णमित आणि स्वयंसंघटन यांनी विज्ञानाचे एकत्रीकरण घडवून आणले आहे.

अगदी खूप क्रांतिकारक वैज्ञानिक संकल्पनासुद्धा त्यांचा प्रत्यक्ष शोध लागण्यापूर्वी विज्ञानजगताच्या वातावरणात इतस्तत: वावरत असतात. आइन्स्टाइन यांनी स्वत:च म्हटल्याप्रमाणे सापेक्षतावादाची ‘हवा’ होतीच आणि त्यामुळे कोणी ना कोणी त्याचा शोध लावणारच होते, थोडे पुढे-मागे झाले असते एवढेच. याचप्रमाणे रूढ अभिजात भौतिकीत अणू, रेणू आणि प्रारण या क्षेत्रांत अनेक अडचणी व प्रश्न निर्माण झाले होते, परस्परविरोधी गोष्टींचा ताळमेळ बसत नव्हता व त्यामुळे एका नव्या सिद्धान्ताची हवा सर्वत्र होतीच. अखेर बऱ्याच वेड्यावाकड्या कठीण मार्गाने पुंजसिद्धान्ताचे अंतिम स्वरूप पुढे आले. याचप्रमाणे कोलाहल आणि अपूर्णमित यांचा शोध केव्हातरी लागणारच होता. संगणकाच्या आगमनाने तो अपरिहार्य बनला. विज्ञानातील कित्येक समीकरणे योग्य विश्लेषणात्मक साधने व पद्धती उपलब्ध नसल्याने तशीच पडून होती. संगणक आल्यावर ह्या समीकरणांची आकडेमोड करून त्यांचा मागोवा घेणे, विविध पैलू धुंडाळणे, त्यांची अंतर्गत रचना शोधून काढणे या गोष्टी एकाएकी आवाक्यात आल्या. एरवी महिने वा वर्षेही लागली असती अशी आकडेमोड करणे आणि आलेख बनविणे ही कामे संगणकावर मिनिटे आणि तासांच्या कालावधीत होऊ लागली. यामुळेच खरा फरक घडून आला.

कधीकधी विज्ञानातील भव्य व महान संकल्पना आपल्याला दिपवून टाकतात, अवाक् करून सोडतात. पण तो विश्वदर्शन सोहळा संपला की आपण तसेच पूर्वीसारखेच राहतो. परंतु कोलाहल, अपूर्णमित आणि स्वयंसंघटन हा विषय मात्र वेगळा आहे. यातील दृष्टिकोन खूप सखोल आहे, पण व्यावहारिक पातळीवरचाही आहे. त्यामुळे आपल्या निसर्गाकडे बघण्याच्या मूलभूत दृष्टीतच बदल घडून येतो आपल्याला जगाचे दर्शन एका वेगळ्या नवीन प्रकाशात घडते.

भाग पहिला

निश्चिततावादाचा ऱ्हास



एक

हवामानतज्ज्ञाची पंचाईत

भविष्यात जेव्हा हवामानतज्ज्ञ आपल्या विषयाचा इतिहास लिहितील तेव्हा त्यांना त्यात 1961 सालाला खास महत्त्वाचे स्थान द्यावे लागेल. या वर्षी एका जुन्या पिढीतील संगणकावर काही आकडेमोड केली गेली आणि त्या प्रिंटआऊटस्‌मधून एक धक्कादायक, परंतु अतिशय महत्वपूर्ण गोष्ट नजरेस आली. आपण विज्ञानात भले कितीही प्रगती केली तरी लांब पल्ल्यांचा हवामान अंदाज अचूकपणे करणे काही शक्य होणार नाही हे या वेळी हवामानतज्ज्ञांना कळून चुकले. आणि हा शोध केवळ हवामानशास्त्राशीच निगडित नव्हता, तर एकूण सर्वच विज्ञानक्षेत्रावर परिणाम घडवून आणणारा होता. त्या संगणकातून उपलब्ध झालेली निकालांची आकडेवारी रूढ विज्ञानाच्या मूलभूत उद्दिष्टांसमोरच प्रश्नचिन्ह उभी करत होती. परंतु ही बातमी पसरण्यास बराच वेळ लागला. त्यामुळे विज्ञानजगतात ही दु:खदायक व क्लेशकारक बातमी आणणाऱ्या प्रेषिताचे - अमेरिकेतील मॅसॅच्युसेटस् इंन्स्टिट्यूट ऑफ टेक्नॉलॉजीमधील हवामानतज्ज्ञ एडवर्ड लॉरेन्झ यांचे - नाव जवळजवळ एक दशक अंधारातच राहिले.

पृथ्वीवरील हवामान ही एक अतिप्रचंड किचकट संहती (System) आहे. कोणत्याही एका क्षणी वेगवेगळ्या जागी वेगवेगळे हवामान असते. बांगलादेशात भयावह चक्रीवादळाचे तांडव चालू असेल त्याच वेळी पंजाबच्या पठाराला शुष्क व असह्य उन्हाळा भाजून काढत असण्याची शक्यता असते. कोणत्याही एका जागी हवामान दिवसादिवसाला असे बदलत राहते की ते अनुभवणारा गोंधळूनच जावा. उदाहरणार्थ, मुंबईत जुलै महिन्यात एक दिवस अत्यंत गरम, अंगातून घामाच्या धारा वाहवणारा असतो; तर दुसऱ्याच दिवशी मुसळधार पाऊस व सोसाट्याचा वारा सर्वांना हुडहुही भरून आणतो. परंतु अशी चंचल वागणूक असूनही हवामानाचा एक विशिष्ट पॅटर्न, आकृतिबंध आढळून येतो. यालाच आपण त्या प्रदेशाचे हवामान म्हणून ओळखतो. ह्या आकृतिबंधाची वर्षानुवर्षे पुनरावृत्ती होत असते; नेमकी नाही पण जवळजवळ पुनरावृत्ती!

हवामानतज्ज्ञांच्या दृष्टीने पृथ्वीचे वातावरण म्हणजे भौतिकीच्या नियमांनी बद्ध अशी एक महाकाय अतिप्रचंड संहती. हिचे आकडेवारीसह संख्यात्मक वर्णन कसे करायचे? या

व्यवस्थेची चले (variables) कोणती ? अगदी सूक्ष्म पातळीवर जाऊन वर्णन करायचे म्हटले तर वातावरणातील अगणित रेणूंपैकी प्रत्येक रेणूचे स्थान व गती यांची माहिती द्यावी लागेल. परंतु हे तर अशक्यच आहे. ह्या संहतीचे वर्णन करण्याचा अधिक व्यावहारिक मार्ग म्हणजे आपणास ज्यांच्या संवेदना जाणवतात आणि आपण ज्यांचे मोजमाप घेऊ शकतो अशा गुणधर्मांचा चले म्हणून वापर करणे. तापमान, दाब, घनता, वाऱ्याचा वेग, आर्द्रता इत्यादींची वातावरणातील प्रत्येक छोट्या छोट्या विभागातील माहिती दिली की संपूर्ण वातावरणाचे वर्णन केल्यासारखे होईल.

परंतु ही प्रचंड संहती काही इतर विश्वापासून पूर्ण विलग नाही. ती अशी असती तर लवकरच सर्वत्र सारखे तापमान, दाब व घटकरचना असलेल्या बिनतोंडवळ्याच्या सम स्थितीत पोहोचून तेथे स्थिरावली असती. परंतु पृथ्वीला सूर्यापासून मिळणारी ऊर्जा असमानरूपाने (differentially) मिळत असते. म्हणजे वेगवेगळ्या वेळी वेगवेगळ्या ठिकाणी शोषल्या जाणाऱ्या ऊर्जेचे प्रमाण वेगवेगळे असते. शिवाय अभिसरण, प्रारण, बाष्पीभवन, द्रवीभवन, श्वासोच्छ्वास इत्यादी क्रियाप्रक्रियांद्वारे पृथ्वीचे वातावरण जमीन व महासागरांशी जोडलेले असते. आपल्या अक्षाभोवती गरगरत सूर्याला प्रदक्षिणा घालणाऱ्या पृथ्वीशी ते गुरुत्वाकर्षणामुळे बांधलेले असते. हे बाह्य घटक आणि विविध आंतरिक व बाह्य क्रिया-प्रतिक्रिया यातून हवामान व त्याची चंचल, लहरी वर्तणूक निर्माण होते.

वैज्ञानिक तसे समजूतदार असतात. हवामानासारख्या अत्यंत क्लिष्ट व बेभरंवशाच्या संहतीचा अभ्यास करताना ते पहिल्याच फटक्यात संपूर्ण समस्येला हात घालत नाहीत. प्रथम फार महत्त्वाचे न वाटणारे घटक बाजूस काढून ते प्रश्न जरा सोपा करण्याचा प्रयत्न करतात. नंतर निर्णायक वाटणारे घटक निवडून काढतात आणि ते घटक, त्यांच्या बदलांचा वेग व प्रवेग यांच्यामधील संबंध दाखविणारी समीकरणे लिहून काढतात. हे संबंध त्या विषयातील मूलभूत नियमांवर आधारित असतात. हवामानाचा अभ्यास करताना द्रवगतिशास्त्राचे नियम लागू पडतात. आणि द्रवगतिशास्त्राचे हे नियम तीनशे वर्षांपूर्वी आयझॅक न्यूटनने शोधून काढलेल्या स्थितीगतिशास्त्राच्या मूलभूत नियमांवर आधारित आहेत. गणितज्ञ या संबंधांना डिफरेंशियल समीकरणे म्हणतात. ही डिफरेंशियल समीकरणे म्हणजे भौतिकीविज्ञानाचा गाभा असून अनेक वैज्ञानिक आपल्या आयुष्याचा बराच मोठा कालखंड त्यांच्याच संगतीत घालवीत असतात.

प्रश्न सोडविण्याच्या ह्या पद्धतीस 'प्रतिमान तयार करणे' (modelling) असे संबोधले जाते. असे प्रतिमान करण्यासाठी अंत:प्रेरणा, प्रयोगाद्वारे उपलब्ध माहिती, आधी केले गेलेले विश्लेषण इत्यादींचा वापर करून त्या संहतीतील महत्त्वाच्या चलांची निवड केली जाते, आणि ती समस्या त्या चलांमधील डिफरेंशियल समीकरणांच्या सटाच्या रूपात मांडली जाते. हे प्रतिमान, समीकरणांचा हा सट म्हणजे काही ती प्रत्यक्षातील संहती नव्हे. प्रतिमान म्हणजे वास्तव नव्हे, पण त्यात वास्तवाचे प्रतिबिंब पडलेले असते. आरसा जर चांगला असेल तर त्यात वास्तव चांगले प्रतिबिंबीत होते; आरसा खराब असेल तर वास्तव वेड्यावाकड्या रूपात त्यात दिसते. मात्र विज्ञानात एक श्रद्धा नि:शंकपणे बाळगली गेली

आहे. ती म्हणजे वास्तवता अधिकाधिक अचूकपणे प्रतिबिंबित होईल अशा प्रकारे निसर्गव्यवहाराच्या प्रतिमानात सुधारणा घडवत राहणे शक्य आहे.

* * *

गेल्या तीन शतकांत अशा प्रकारे वास्तवाशी अधिकाधिक मिळतीजुळती प्रतिमाने करण्यात वैज्ञानिकांना खूपच यश प्राप्त झाले आहे व त्यातूनच ही श्रद्धा निर्माण झाली आहे. हे यश अन्य विषयांपेक्षा रूढ अभिजात भौतिकीत अधिक प्रखरपणे जाणवून येते. न्यूटनचे गतिनियम व गुरुत्वाकर्षणाचा सिद्धान्त एक वैश्विक संदर्भचौकट उपलब्ध करून देतात व या चौकटीत निसर्गातील घडामोडींपैकी एका मोठ्या हिश्श्याचे वर्णन करणे शक्य होते. अंतराळातील हालचाली (उदा. पृथ्वीचे सूर्याभोवती वा चंद्राचे पृथ्वीभोवती भ्रमण), पृथ्वीवरील घडामोडी (उदा. हवेत फेकलेल्या वस्तूची मार्गक्रमणा, वस्तूंची परस्परांशी टक्कर, तारांची कंपने), आणि वस्तुमात्रातील अणू-रेणूंच्या हालचाली, अशा खूप विभिन्न पातळीवरील घटना या चौकटीत एकाच मूलभूत नियमावली वा सिद्धान्तगटाद्वारे समजून घेता येतात. न्यूटनचे नियम घन-द्रव-व वायुगतिकीचा पाया आहेत. हे नियम ज्या ज्या बाबतीत काही निश्चित भाकिते वर्तवितात ती खरी ठरत असल्याचे आपल्याला दैनंदिन व्यवहारात अनुभवासही येते.

अशा तऱ्हेच्या देदीप्यमान यशामुळे अगदी आत्यंतिक शंकेखोर व काटेकोर वैज्ञानिकाचे डोळेही दिपून जातात. त्यामुळे त्या सिद्धान्तावर अवाजवी विश्वास टाकण्याची प्रवृत्ती निर्माण होते व त्यातील अध्याहृत गृहीतके दुर्लक्षिली जातात. पिए सिमोन लाप्लास हा न्यूटननंतर एका शतकाने अवतरलेला थोर फ्रेंच गणिती व भौतिकी वैज्ञानिक. त्याने न्यूटनचे नियम वापरून सूर्यमालेच्या स्थैर्याचा प्रश्न अभ्यासला व आपले गाढे संशोधन 'मेकॅनिके सेलेस्ते' या ग्रंथराजात एकत्र आणले. हा ग्रंथ त्याने नेपोलियनला भेट दिला तेव्हा स्वर्गातील ग्रहताऱ्यांच्या हालचालींवरील या प्रचंड संशोधनात देवाचा काहीच उल्लेख नाही याबद्दल त्या फ्रान्सच्या बादशहाने अचंबा व्यक्त केला. असे म्हणतात की लाप्लासने नम्रपणे, पण आत्मविश्वासाने उत्तर दिले, 'महाराज, मला त्या गृहीतकाची काही गरज भासली नाही.'

दोन शतकांपूर्वी उच्चारल्या गेलेल्या या शब्दांचा प्रतिध्वनी तेव्हापासून आजतागायत विज्ञानाच्या विजयी मोहिमेत दुमदुमतो आहे. रूढ अभिजात विज्ञानातील 'निश्चिततावाद' म्हणून ओळखला जाणारा जो दृष्टिकोन आहे, तो निर्माण करण्यात हे शब्द अंशत: तरी कारणीभूत आहेत. न्यूटनीय गतिनियम निश्चिततावादी आहेत, याचा अर्थ हे नियम कोणत्याही संहतीची हालचाल पूर्णांशाने निश्चित करतात. या नियमांत संभवनीयतेचा असा कोणताही घटक नसतो की ज्याचा दूरान्वयाने का होईना, पण दैवी शक्तीशी संबंध जोडता यावा. एक गोष्ट मात्र लक्षात ठेवली पाहिजे. आपण नुसतीच शून्यातून, कोणत्याही आधाराशिवाय काही भाकिते करू शकत नाही. कोणत्यातरी एका क्षणी आपणास त्या संहतीचे पूर्ण ज्ञान असणे जरूर असते. तरच या न्यूटनीय नियमांचा वापर करून त्या

संहतीची भूत आणि भविष्यातील सर्वकालीन हालचाल निश्चित करता येते. निश्चिततेतून कधीकधी परिस्थितीवर ताबा मिळविण्याची शक्ती प्राप्त होते. उदाहरणार्थ, एखाद्या क्षेपणास्त्राची आरंभीची स्थिती (initial conditions) योग्य तशी जुळवून आणून आपण ते क्षेपणास्त्र हव्या त्या लक्ष्यावर अचूक सोडू शकतो. निश्चिततेमुळे आपणास केवळ भविष्य जाणण्याचेच नव्हे तर, काही बाबतीत भविष्य घडविण्याचे सामर्थ्य प्राप्त होते.

गेल्या शतकाच्या उत्तरार्धात अशा काही गोष्टी घडून आल्या की त्यामुळे वरील निश्चिततावादी दृष्टिकोनाला खूपच बळकटी प्राप्त झाली. यातील सर्वांत महत्त्वाची गोष्ट म्हणजे विद्युत व चुंबकशास्त्रासंबंधी जेम्स क्लर्क मॅक्सवेल याने मांडलेले सिद्धान्त. मॅक्सवेलचे नियमही निश्चिततावादीच होते. त्यानुसार काही भाकिते केली गेली. उदाहरणार्थ, विद्युतचुंबकीय लहरी असल्या पाहिजेत हा निष्कर्ष. आणि कालांतराने त्या लहरींचे अस्तित्व प्रायोगिक पातळीवर सिद्धही झाले. निश्चिततावादाचे तत्त्वज्ञान केवळ स्थितीगतिशास्त्रालाच नव्हे तर विद्युतचुंबकीय शास्त्रालाही लागू पडत होते. या आश्चर्यकारक सफलतेमुळे निश्चिततावादाला विज्ञानाच्या गृहीत तत्त्वांत स्थान प्राप्त झाले, त्याची पाळेमुळे विज्ञानाच्या ध्येयधोरणातच रुजून गेली. विज्ञानक्षेत्रातील निरनिराळ्या विषयांचे मूल्यमापन करण्याचा मानदंड म्हणून त्याचा वापर होऊ लागला. एखाद्या विषयात प्रायोगिक कसोटीवर तपासण्याजोगी भाकिते करता येत नसतील तर तो विषय बिनकामाचा व अशास्त्र मानला जाऊ लागला.

या शतकाच्या सुरूवातीस निश्चिततावादाला पहिले गंभीर आव्हान मिळाले. अणू-रेणूंच्या हालचालींचे समाधानकारक स्पष्टीकरण देण्यात न्यूटन व मॅक्सवेलचे नियम अयशस्वी झाले. एक नवीन विज्ञान उदयास आले व यात निसर्गातील मूलभूत नियम निश्चिततावादी नसून संभवनीयतेच्या स्वरूपाचे (probabilistic) असल्याचे स्पष्ट झाले. उदाहरणार्थ, एखादा उद्दीपित स्थितीतील विशिष्ट अणू ऊर्जापुंज उत्सर्जित करून मूळ सामान्य स्थितीत नेमका कोणत्या क्षणी परतेल ते काही पुंजसिद्धान्त सांगू शकत नाही. हा सिद्धान्त त्या घटनेची केवळ संभवनीयताच सांगू शकतो. खूप मोठ्या संख्येने असे अणू उपस्थित असतील तर निम्मे अणू मूळ स्थितीत परतण्यास किती कालखड लागेल हे हा सिद्धान्त व्यवस्थित सांगू शकतो, पण कोणता अणू कोणत्या क्षणी हे संक्रमण करेल हे काही सांगू शकत नाही. प्रत्येक पुंजसंहतीशी वेगवेगळ्या घटकांच्या संभवनीयता निगडित असतात. या संभवनीयतांच्या बदलांचा वेग मात्र पुंजसिद्धान्तातील निश्चित नियमांनुसारच ठरविला जातो. कालक्रमानुसार या संभवनीयतांत होणाऱ्या बदलांत वा उत्क्रांतीत कोणतीही अनिश्चितता नसते. असे म्हणता येईल की रूढ, अभिजात भौतिकीतील निश्चितता पुंजसिद्धान्ताने नष्ट केली असली तरी संख्याशास्त्रीय स्वरूपात तिचा एक प्रकारे पुनर्जन्मच झाला आहे. दैनंदिन व्यवहारातील सामान्य पातळीवरील बहुतांशी घटना व घडामोडींबाबत हा नवा सिद्धान्त रूढ भौतिकीपेक्षा काही वेगळा परिणाम घडवून आणत नाही, त्यातील अणू-रेणूंच्या पातळीवरील अनिश्चितता काही या सामान्य पातळीवर कोठे जाणवत नाही.

निश्चितता व भाकीतक्षमता

सन 1961 मधील त्या महत्त्वपूर्ण दिवशी एडवर्ड लॉरेन्झ पृथ्वीच्या हवामानाविषयी त्याने मांडलेल्या प्रतिमानाशी संगणकावर खेळत बसला होता. तसे ते एक साधे सोपे प्रतिमान होते. परंतु खऱ्या हवामानाचे काही गुण त्यातून प्रकट होत होते. पृथ्वीच्या हवामानाची पूर्णांशाने नाही तरी बऱ्याच अंशी पुनरावृत्ती होत असते. आणि लॉरेन्झचे प्रतिमान ही वस्तुस्थिती दर्शवीत असे. त्या दिवशी लॉरेन्झने तापमान, हवेचा दाब, वाऱ्याचा वेग, आर्द्रता इत्यादी हवामानसंबंधी चलांच्या प्रारंभीच्या किमती संगणकात भरल्या. त्या वापरून प्रतिमानातील समीकरणे सोडवून संगणक आकड्यांनी भरलेल्या प्रिंटआऊटची भेंडोळी बाहेर टाकू लागला. हवामानाची बदलती स्थिती त्यातून कळून येत होती. एक प्रिंटआऊट मिळाल्यावर आणखी एका विशिष्ट काळानंतर हवामान कसे बदलेल हे पाहावेसे वाटल्याने लॉरेन्झने पुन्हा संगणक सुरू केला, व पहिल्या प्रिंटआऊटमधूनच चलांच्या प्रारंभीच्या किंमती घेऊन संगणकात भरल्या. नवीन प्रिंटआऊटचा पहिला भाग आधीच्या प्रिंटआऊटचीच नक्कल असणार ही त्याची नैसर्गिक अपेक्षा होती. परंतु त्याला आश्चर्याचा धक्काच बसला. दुसऱ्या प्रिंटआऊटचे पहिल्याशी जवळजवळ काहीच साम्य नव्हते. दोन्ही वेळी सुरुवातीचे हवामान जवळजवळ सारखेच होते, परंतु नंतर त्यांच्यात मोठा फरक पडत गेला. एखादी क्षुल्लक चूक झाली असावी वा संगणकात काही यांत्रिक दोष असावा या शंकेने लॉरेन्झने तपासणी केली. पण तसे काहीही नव्हते. त्याला प्रश्न पडला - दोन प्रिंटआऊटस्‌मध्ये एवढा फरक कसा? लवकरच त्याला या कोड्याचे मूळ गवसले. दुसऱ्या खेपेस त्याने पहिल्या प्रिंटआऊटमधील सुरुवातीचे आकडे वापरले होते व ते दशांशाच्या तिसऱ्या स्थानापर्यंतच होते. संगणकाच्या स्मृतिकोशात भरलेले व पहिल्या खेपेस वापरलेले हेच आकडे दशांशाच्या सहाव्या स्थानापर्यंत जाणारे होते. समजा, पहिल्या खेपेतील एका चलाची किंमत 0.432185 असेल तर दुसऱ्या खेपेस ती 0.432 घेतली जात होती. याचा अर्थ असा होता की ते दोन भिन्न अंतिम परिणाम जवळजवळ सारख्या, परंतु एकसारख्या नसलेल्या प्रारंभीच्या स्थितीतून निर्माण होत होते. काही काळ या प्रिंटआऊटस्‌वर ध्यान लावून विचार केल्यावर लॉरेन्झला समजून चुकले की निश्चिततावाद म्हणून ज्या काही कल्पना त्या वेळी सर्वसंमत होत्या त्या प्रत्यक्षात निसर्गव्यवहाराचे टिकाऊ तत्त्वज्ञान देण्यास समर्थ नव्हत्या.

लॉरेन्झचा हा निर्णय कोणत्या पायावर आधारित होता? त्याला आढळून आला तो दोन अंतिम परिणामांतील फरक इतका महत्त्वाचा का मानावा? द्रवगतिकीचे नियम वा न्यूटनचे मूलभूत नियम यात लॉरेन्झला काही चूक आढळली नव्हती व तसा संशयही येण्याचे कारण नव्हते. परंतु या अनपेक्षित फरकाने न्यूटनीय विज्ञानाच्या निश्चिततावादी तत्त्वज्ञानाला वेढून असलेले एक मिथ्य, एक मूलभूत चूक त्याला कळून चुकली.

ही चूक म्हणजे 'निश्चिततावादी नियम म्हणजेच भाकीतक्षमता' असे समीकरण मांडणे. विज्ञानाच्या प्रत्येक विद्यार्थ्याला हे माहीत असते की केवळ नियम पुरेसे नसतात. अंतिम परिणाम कोणते ठरतील याचे गणित सोडवायचे असेल तर त्या संहतीची आरंभीची स्थितीही माहीत असणे आवश्यक असते. कोणत्याही संहतीची अंतिम स्थिती तिच्या

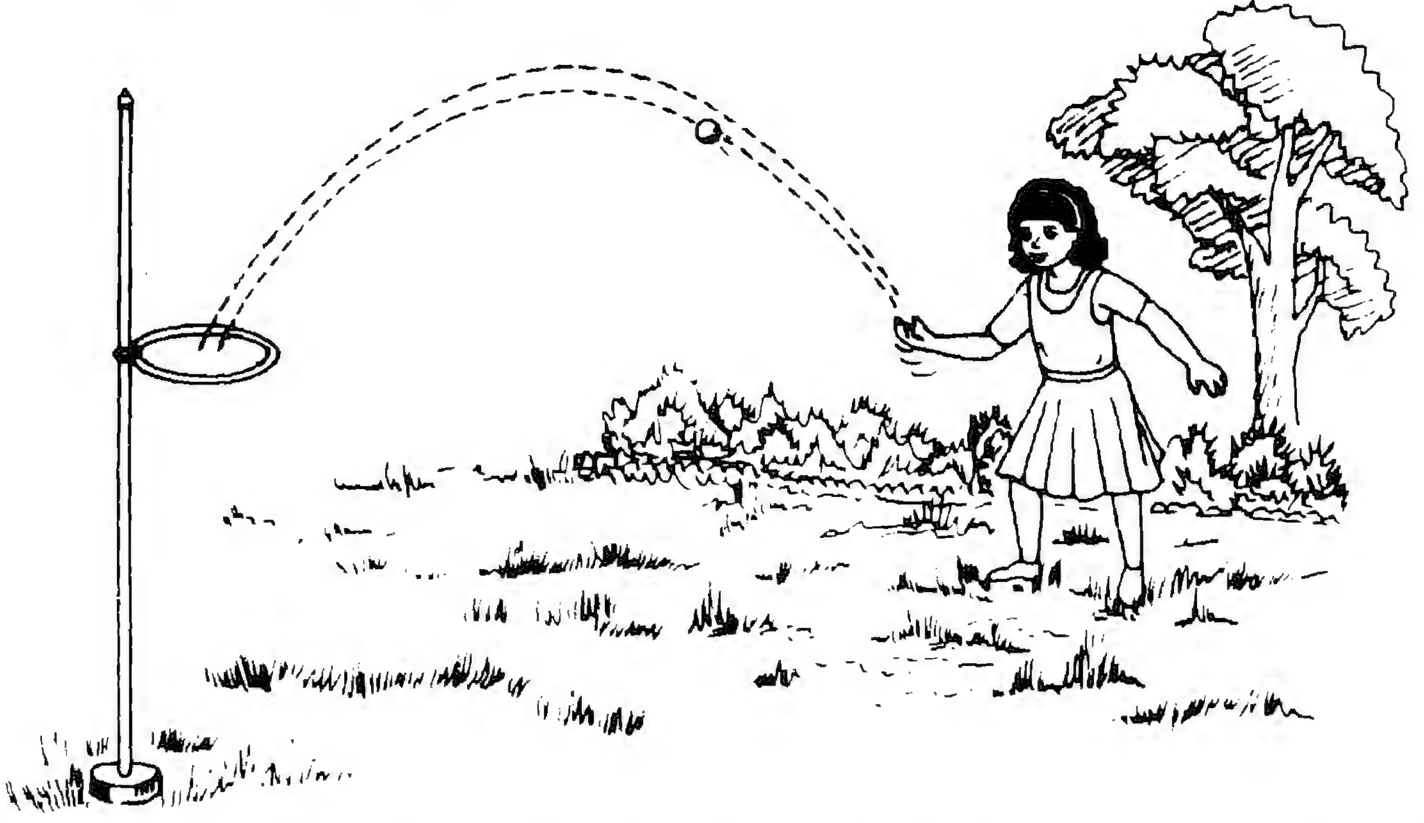
गतिनियमांइतकीच तिच्या प्रारंभस्थितीवरही अवलंबून असते. हा मुद्दा इतका उघड आहे की त्यामुळेच तो दुर्लक्षिला जाण्याची शक्यता असते. समजा बागेत खेळत असलेल्या मुलीच्या हातात एक चेंडू आहे. तिने तो उभाचा उभा वर फेकला तर काही काळाने तो परत तिच्या हाती येईल. परंतु जर काही अंतरावरील एका खांबावर बसवलेल्या कड्यातून तो चेंडू पसार करायचा असेल तर प्रारंभीच्या फेकीचा विशिष्ट वेग व कोन निवडावा लागेल. या दोन्ही बाबींत गुरुत्वाकर्षणाचा नियम एकच असतो, मात्र अंतिम परिणाम - चेंडू मुलीच्या हाती परत येणे वा कड्यातून पसार होणे - प्रारंभीच्या चेंडूफेकीच्या वेग व कोनावर अवलंबून असतो. (आकृती 1.1)

आता या खेळात भाकीतक्षमता आहे हे निश्चित. त्या मुलीला चांगला सराव असेल तर ती प्रत्येक फेकीत चेंडू बरोबर कड्यात टाकेल. हा विश्वास कशावर आधारित आहे? एक म्हणजे त्या मुलीस माहीत असते की चेंडूची मार्गक्रमणा काही वेडीवाकडी नसते (सध्या तरी जोरदार वारे नाहीत असे धरून चालू), तर तो व्यवस्थित अन्वस्तीय (पॅराबोलिक) मार्गानेच जातो. म्हणजे भाकीतक्षमतेचा एक आधार आहे निसर्गाचे निश्चिततावादी नियम. परंतु त्या मुलीला अचूकपणे चेंडू कड्यात टाकता येतो ही गोष्ट तितक्याच महत्त्वाच्या आणखी एका गोष्टीवर अवलंबून आहे. अगदी जाणीवपूर्वक नसले तरी त्या मुलीस हे भान असते की या खेळात काही प्रमाणात चेंडूफेक इकडेतिकडे होण्यास वाव असतो. त्या कड्याचे एक क्षेत्रफळ असते. एका विशिष्ट फेकीमुळे चेंडू जर बरोबर कड्याच्या मध्यावर पडत असेल, तर किंचित वेगळ्या फेकीमुळे तो मध्यावरून किंचित बाजूस सरकेल. परंतु तरीही तो कड्यातून पसार होईलच. असे नसते तर त्या मुलीस या खेळाबद्दलचा आत्मविश्वास आलाच नसता. कारण मग सुरुवातीच्या फेकीच्या वेगातील वा कोनातील किंचितसा बदलही चेंडूला कड्यापासून फार दूर घेऊन गेला असता.

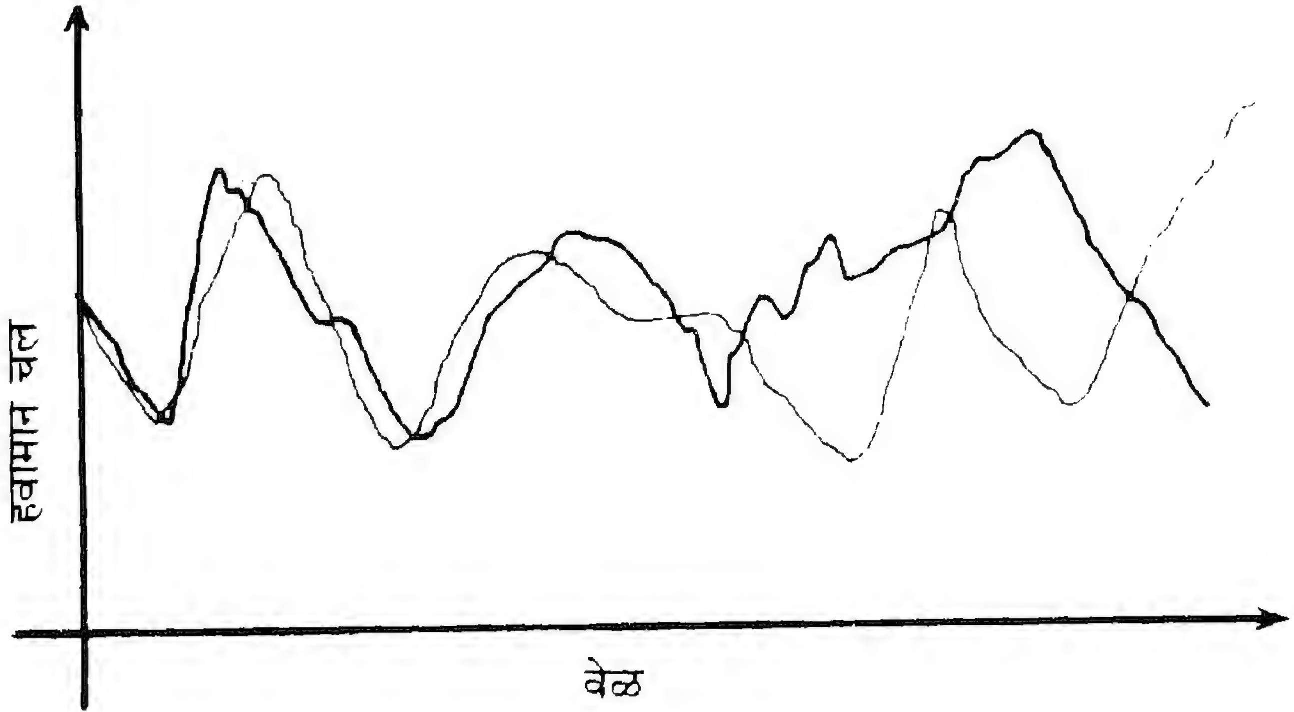
याचा अर्थ निश्चिततावादी नियम व प्रारंभस्थितीतील छोट्या फरकांवर पुढील हालचाली फार संवेदनाक्षम रीतीने अवलंबून नसणे, या दोहोतून भाकीतक्षमतेचा उगम होतो.

एखाद्या परिस्थितीत काबूत न राखण्यासारखे, अनियमितपणे बदलणारे घटक असले तर साहजिकच भाकीतक्षमता नष्ट होते. वरील उदाहरणात जर जोरदार वेडेवाकडे वारे वाहत असतील तर असे घडून येईल. चेंडूचा मार्गच अनियमित होईल, मार्गक्रमणेचे नियम निश्चिततावादी राहणार नाहीत. अशा प्रकारची अनिश्चितता आपणास आपल्या आयुष्यात पदोपदी आढळतेच. बाह्य अनियमित घटकांमुळे निर्माण होणारी अनिश्चितता.

परंतु लॉरेन्झला आढळले *ते हे नव्हते.* त्याच्या प्रतिमानातील समीकरणे पूर्णत: निश्चिततावादी होती; त्यांत कोणत्याही प्रकारचा शक्याशक्यतेचा घटक नव्हता. तरीही त्यातून भाकीतक्षमता नाहीशी झाली होती, कारण त्याचे प्रतिमान प्रारंभस्थितीतील छोट्या फरकांच्या बाबत फारच संवेदनाक्षम होते. त्या प्रतिमानात सुरुवातीचा लहानसा बदल झपाट्याने मोठ्या बदलात रूपांतरित होत होता. त्यामुळे प्रारंभी जवळजवळ सारखी असणारी दोन हवामाने अखेर परस्परांपासून पूर्ण भिन्न झालेली दिसत होती. लॉरेन्झचे म्हणणे होते की प्रत्यक्षात खऱ्या हवामानाच्या बाबतीत प्रारंभीची स्थिती कधीच पूर्ण अचूकपणे देता



आकृती 1.1 : वारा वाहत नसताना चेंडूने बागेत खेळणारी मुलगी. येथे गुरुत्वाकर्षणाच्या निश्चिततावादी नियमांतून भाकीतक्षमता निर्माण होते.



आकृती 1.2 : 'फुलपाखरू परिणाम' (नमुन्यादाखलचा आलेख). प्रारंभस्थितीतील हवामानातील छोटे बदल झपाट्याने विस्तारत जातात. त्यामुळे निश्चिततावादी नियम असूनही दीर्घकालीन भाकीतक्षमतेचा अभाव निर्माण होतो.

येत नाही. कितीही हवामान-उपग्रह अवकाशात सोडले आणि त्याद्वारे जगभरच्या हवामानाचे भरपूर तपशीलवार नमुने गोळा केले तरी त्यांत नेहमीच सूक्ष्म चुका राहणारच. आणि मग हवामानाच्या गतिनियमांनुसार हे मुळातील फरक इतके वाढत जातील की संगणकावर वर्तवलेला हवामान अंदाज व प्रत्यक्षातील हवामान यांच्यांत कसलेच साम्य नजरेत येणार नाही.

''एखाद्या संहतीचे तिच्या प्रारंभस्थितीवर असलेले अतिसंवेदनाक्षम अवलंबित्व'' - लॉरेन्झच्या शोधाचे वर्णन करणारा हा शब्दसमूह सध्या बराच लोकप्रिय झाला आहे. निश्चिततावादी नियम असूनही निर्माण होणाऱ्या या भाकीतक्षमतेच्या अभावास *कोलाहल* असे म्हटले जाते. ज्यांत प्रारंभीच्या स्थितीतील फरक कालप्रवाहाच्या ओघातही लहान प्रमाणातच मर्यादित राहतात अशाच संहतींशी वैज्ञानिकांचा दीर्घ काळ संबंध आलेला आहे. अंतराळात अवकाशयाने सोडण्याची प्रचंड मोहीम केवळ यावरच आधारित आहे. वर उल्लेखिलेल्या चेंडूफेकीच्या खेळाप्रमाणेच अवकाशयानांच्या बाबतीतही निश्चिततावाद भाकीतक्षमतेशी जोडला गेला आहे. मात्र निसर्गातील सर्वच संहतींना हे लागू आहे असे सर्रास गृहीत धरणे ही वैज्ञानिकांची चूकच होती.

लॉरेन्झच्या हवामानविषयक प्रतिमानात कोलाहल आढळून आला. जर ह्या प्रतिमानात खऱ्या हवामानाचे प्रमुख व महत्त्वाचे गुणधर्म प्रतिबिंबित होत असतील तर मग दिल्लीत एखाद्या फुलपाखराने आपले पंख फडफडविल्यास त्याचा परिणाम काही महिन्यांनी लंडनमधील हवामानावर होईल असे म्हणणे अतिशयोक्तिपूर्ण ठरणार नाही.

हवामान ही जर एक कोलाहलपूर्ण संहती असेल तर मग फुलपाखराने घडवून आणलेले तापमान व दाबातील सूक्ष्म फरकही फार झपाट्याने वाढत जातील. त्यामुळे तयार होणारे हवामान हे त्या फुलपाखराने आपले पंख फडफडविले नसते तर होणाऱ्या हवामानापेक्षा खूपच वेगळ्या तऱ्हेने उत्क्रांत होईल. हा परिणाम 'फुलपाखरू परिणाम' म्हणून ओळखला जातो. (आकृती 1.2)

फुलपाखरू परिणामामुळे दीर्घकालीन हवामानाचा अंदाज करणे ही एक निष्फळ गोष्ट ठरते. निश्चिततावादी नियम व भाकीतक्षमता यांचे समीकरण नेहमीच जुळलेले असणे आवश्यक नाही. काही संहतींच्या बाबत (उदा. अवकाशयान, धूमकेतू वगैरे) निश्चिततावादी नियम आगामी कित्येक वर्षांची, अगदी कित्येक शतकांचीही, भाकिते अचूकपणे करू शकतात. याउलट हवामानाच्या अंदाजासाठी जगभरातून सतत प्रचंड प्रमाणावर किचकट माहिती गोळा करून त्या नमुन्यांचे निश्लेषण करावे लागते. हवामानाच्या हालचालींचे अचूक प्रतिमान तयार करण्यासाठी हजारो क्लिष्ट समीकरणे मांडावी लागतात. याकरता जरूर त्या आकडेमोडीसाठी जगातील सर्वात गतिमान सुपरसंगणक कामाला लावावे लागतात. आणि तरीही हवामानाचे सर्वोत्कृष्ट अंदाज कधीही आगामी एका आठवड्यापेक्षा अधिक काळासाठी केले जात नाहीत. पृथ्वीवरील हवामान ही एक अगडबंब कोलाहलयुक्त संहती आहे. ह्या हवामानाला काबूत आणण्याचे वा त्याचे दीर्घकालीन भाकीत करण्याचे स्वप्न कधीच वास्तवात उतरणार नाही. हवामानतज्ज्ञाची अंदाज चुकल्याने होणारी पंचाईत टाळण्यासाठी विज्ञानाकडे काही उपाय नाही!

लॉरेन्झच्या शोधाची कहाणी संदर्भ क्र. 4 मध्ये वर्णन केली आहे.

दोन

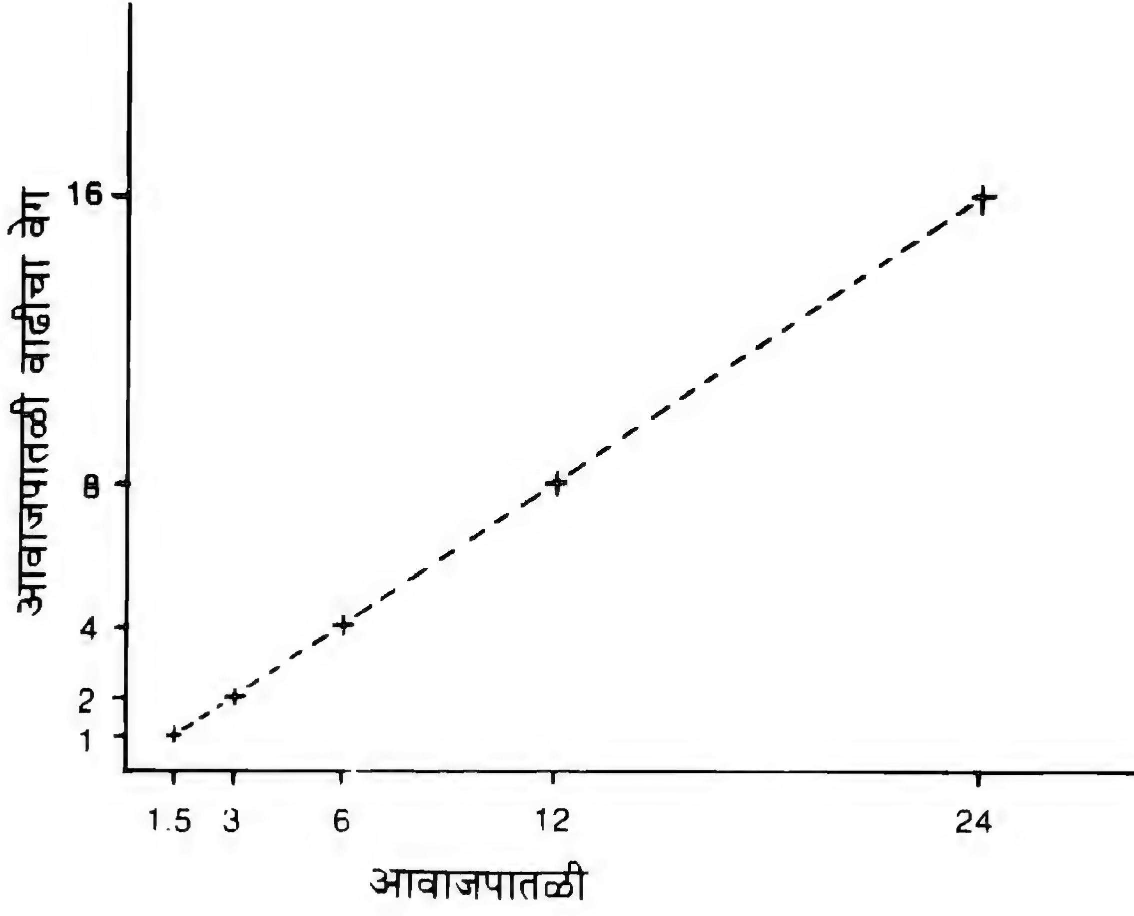
अनिश्चित प्राणिसंख्या

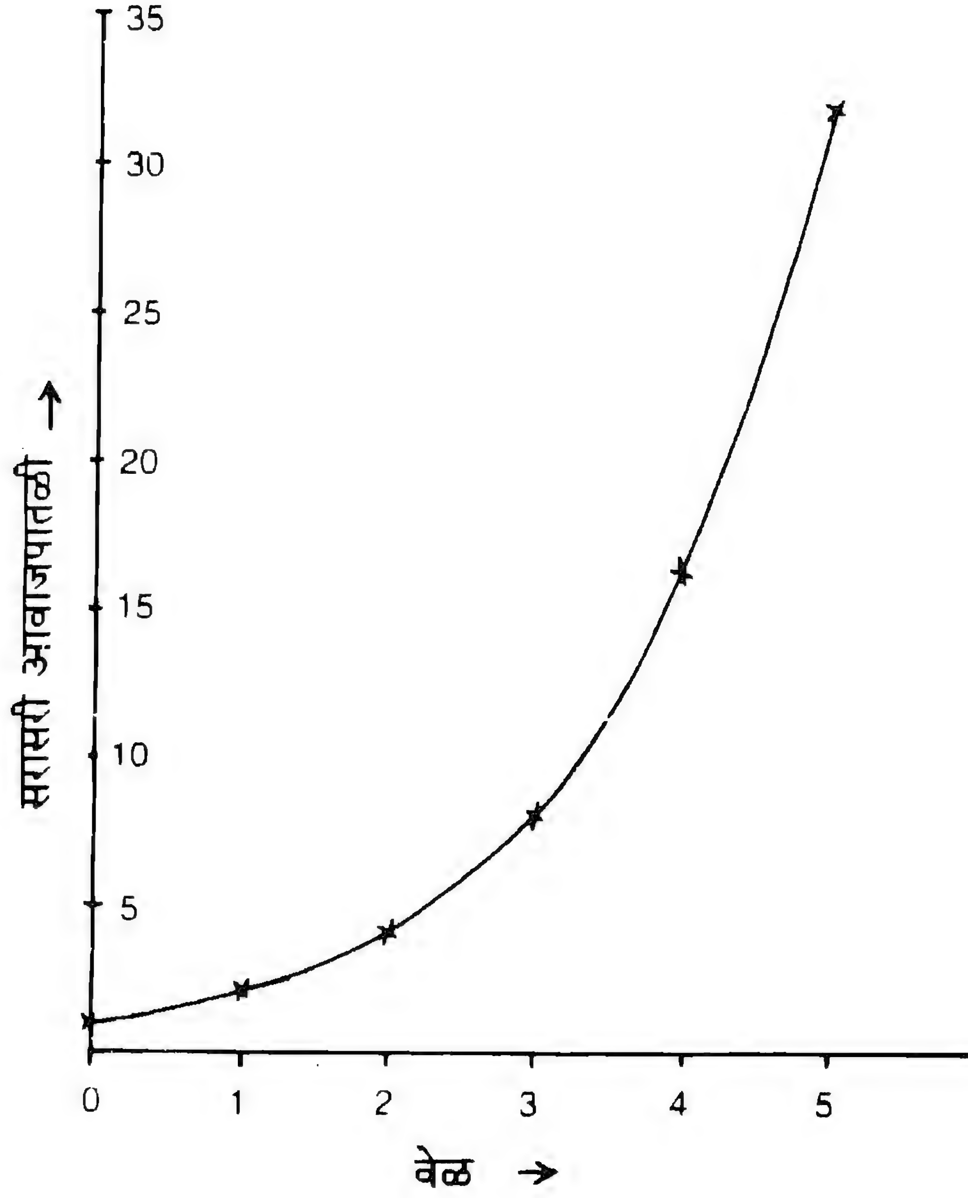
शाळेत शिकलेले गणित कधीकधी आपल्या उपयोगास येत नाही. एका आंब्याला चार रुपये पडत असतील तर पाच डझन आंब्यांची किंमत किती? शालेय गणितानुसार उत्तर येते $5 \times 12 \times 4$ म्हणजे रु. 240. या ठिकाणी आपण असे धरून चालतोय की एकूण किंमत (C) ही वस्तूंच्या संख्येच्या (N) ठरावीक पटीत असते. म्हणजे $C = K.N$, येथे K म्हणजे एका वस्तूची किंमत. ज्या वेळी K ची किंमत स्थिर असते तेव्हा संख्येनुसार (N) एकूण किमतीत (C) होणारा बदल *रेषीय* आहे असे म्हटले जाते. (C) आणि (N) यांचा आलेख एक सरळ रेषा असते. किंमत व संख्या यांच्या संबंधात रेषीयत्व असते असे शालेय गणितात मानले जाते.

परंतु बाह्य जग शाळेपेक्षा वेगळेच असते. आपण जेव्हा वस्तू अधिक संख्येने विकत घेतो तेव्हा एकूण किंमत साधारणत: वाढत जाते, परंतु ती समप्रमाणातच वाढेल असे नाही. वरील उदाहरणात पाच डझन आंबे 210 रुपयात देण्यास आपण दुकानदारास राजी करू शकतो, आणि मग एका आंब्याची किंमत साडेतीन रुपये इतकी खाली येते. दुकानदाराने एका आंब्याची किंमत K ही संख्येवर, N वर, अवलंबित केली आहे. म्हणजे K हे N चे फल (function) आहे. N ची किंमत वाढत गेली की K ची थोडी कमी होते. आता C आणि N यांचा आलेख एक सरळ रेषा राहत नाही. वास्तवातील जगात किंमत व संख्या यांच्यातील संबंध बरेच वेळा अरेषीय असतो.

अरेषीयत्त्वाची उदाहरणे निसर्गात विपुल प्रमाणात आढळतात. 'अ' आणि 'ब' अशा दोन व्यक्तींमध्ये रस्त्यावर भांडण जुंपले आहे अशी कल्पना करा. काहीतरी कारणाने 'अ' आवाज चढवून 'ब' शी बोलतो. या आवाजाची पातळी आपण 1 धरू. आपण असेही धरून चालू की प्रत्येक व्यक्ती प्रत्युत्तर देताना आवाजाची पातळी दुप्पट करते, आणि दोन प्रत्युत्तरांत एक सेकंदाचा काळ जातो. पुढील तक्त्यात ('अ' किंवा 'ब'च्या) आवाजाची पातळी वेळेनुसार कशी बदलते ते दाखविले आहे.

यावरून स्पष्ट होते की वेळ T असताना आवाज पातळी 2^T (2 घातांक T) इतकी असते. म्हणजेच आवाज कालानुसार रेषीय प्रकारे नाही तर घातांकी प्रकारे वाढत जातो.





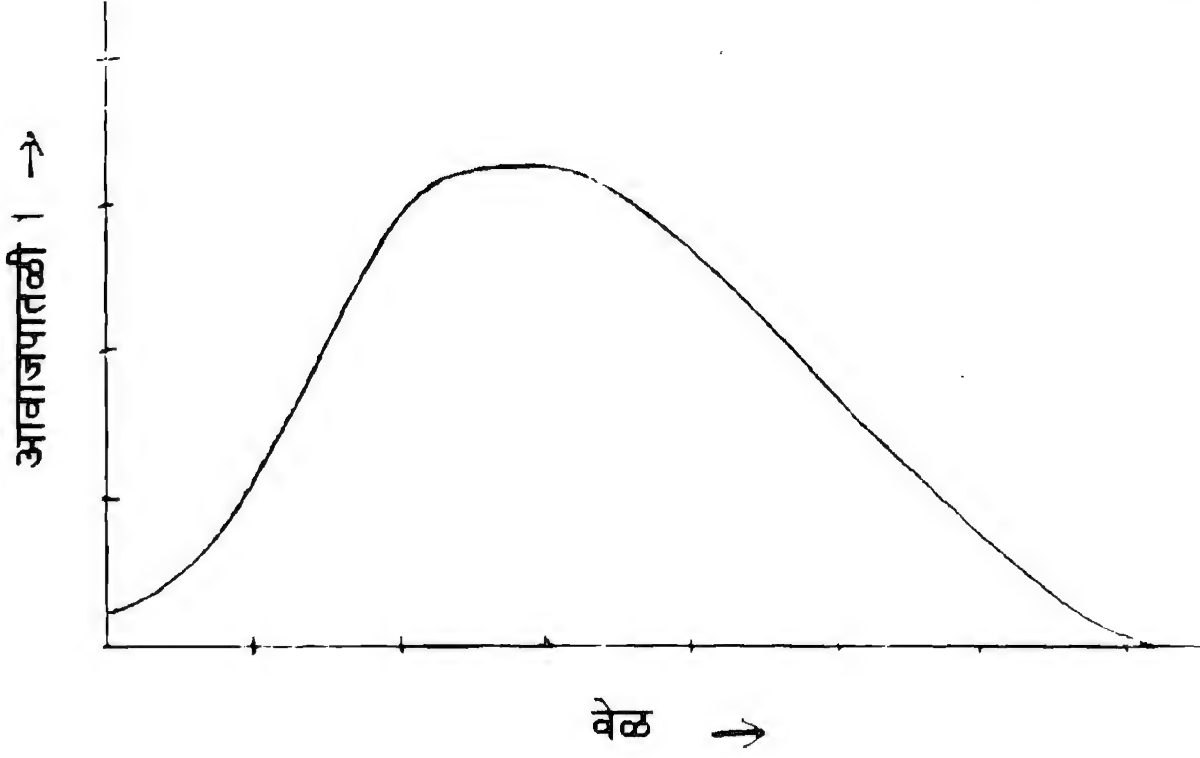
आकृती 2.1 : रस्त्यावरील भांडणाचे रेषीय प्रतिमान. येथे आवाजपातळीच्या वाढीचा वेग व सरासरी आवाजपातळी यांच्यातील संबंध रेषीय आहे.

व्यक्ती	*वेळ*	*आवाज पातळी*	*सरासरी आवाजपातळी*	*आवाजपातळीच्या वाढीचा दर*
अ	0	1	1.5	1
ब	1	2	3	2
अ	2	4	6	4
ब	3	8	12	8
अ	4	16	24	16
ब	5	32		

आता प्रत्येक एका सेकंदाच्या कालखंडातील आवाजपातळीच्या वाढीचा दर व त्या कालखंडातील सरासरी आवाजपातळी यावर आपण नजर टाकू. तक्त्यावरून या परिमाणांतील संबंध रेषीय दिसतात. सरासरी आवाजपातळी दुप्पट झाली की आवाजपातळीतील वाढीचा दरही दुप्पट होतो. म्हणजे आपण कोणती परिमाणे वापरतो त्यानुसार एकाच उदाहरणात आपणास रेषीयत्वाचे तसेच अरेषीयत्वाचे दर्शन घडते. (आकृती 2.1)

रस्त्यावरील भांडणाचे हे प्रतिमान वास्तववादी नाही, कारण यात आवाजपातळी अमर्यादित वाढत जाते. प्रत्यक्षातील भांडणात वेगळेच घडते. एक शक्यता अशी की सुरुवातीस थोडी शब्दाशब्दी होऊन आवाज हळूहळू तापू लागतील. काही वेळाने दोन्ही बाजू आपले आवाज एकदम वरच्या पातळीवर नेतील. परंतु लवकरच विविध कारणांमुळे आवाज चढण्याला खीळ बसेल. एक म्हणजे आपल्या स्वरयंत्राची ताण सहन करण्याची क्षमता मर्यादितच असते. शिवाय प्रत्येक व्यक्तीला भीती असते की दुसरी व्यक्ती या शाब्दिक लढाईला प्रत्यक्ष हातघाईचे रूप देईल. हे आणि इतर अनेक घटक (उदाहरणार्थ, मित्रमंडळींनी केलेले समझोत्याचे प्रयत्न) आवाजपातळीच्या वाढीचा वेग आणि आवाजपातळी यांच्या संबंधात अरेषीयता आणतात. आवाजपातळी प्रारंभी हळू व नंतर झपाट्याने वाढते, त्यानंतर काही काळ ती एकाच किमतीवर स्थिरावते आणि मग सावकाशीने घसरत शून्यावर येत भांडण संपल्याचे दर्शविते. रेषीय प्रतिमानाप्रमाणे येथे पातळीवाढीचा दर आवाजपातळीच्या समप्रमाणात नसतो. प्रथम तो आवाजपातळीबरोबर वाढतो, कमाल किंमत गाठतो व नंतर कमी होत शून्य गाठून अखेर ऋण किंमतीवर घसरतो. (आकृती 2.2)

या उदाहरणात अरेषीयत्व विधायक भूमिका पार पाडते : परिस्थिती काबूत ठेवून स्फोट होणे टाळले जाते. परंतु काही वेळा अरेषीयत्व परिस्थिती अधिक गंभीर करण्यास कारणीभूत होते. 'अ' आणि 'ब' या दोन राष्ट्रांत युद्धाला तोंड फुटण्यास कारणीभूत होणाऱ्या परिस्थितीचा आपण विचार करू या. येथे रस्त्यावरील भांडणात येणाऱ्या 'आवाजपातळी' ऐवजी आपण 'शत्रुत्वपातळी'चा वापर करू. प्रत्येक देशाच्या शस्त्रास्त्रपातळीवरून त्यांच्यातील 'शत्रुत्वपातळी' ठरते असे मानू. असेही धरून चालूया की शस्त्रास्त्रांच्या वाढीचा



आकृती 2.2 : रस्त्यावरील भांडणाचे अरेषीय प्रतिमान.

वेग दोन परस्परांना विरोधी असणाऱ्या घटकांनी ठरतो :- पहिला त्या देशांच्या सरासरी शस्त्रास्त्रपातळीच्या प्रमाणात बदलतो, आणि दुसरा त्यांच्यातील सरासरी व्यापारविनिमयाच्या प्रमाणात. पहिल्या घटकामुळे शस्त्रास्त्रपातळी वाढते, तर दुसऱ्यामुळे ती कमी होते. शांतताकाळात हे दोन घटक परस्परांना छेद देतात व शस्त्रास्त्रपातळीवाढीचा वेग शून्य राहतो. दोन्ही देशांतील शस्त्रास्त्रसाठा स्थिर राहतो.

आता 'पहिला घटक शस्त्रास्त्रपातळीच्या प्रमाणात बदलतो' ही गोष्ट फक्त शस्त्रास्त्रपातळी कमी असतानाच लागू पडते असे मानणे साहजिकच वाटते. कारण जेव्हा शस्त्रास्त्रपातळी वाढलेली असेल तेव्हा दोन्ही देश परस्पर अविश्वास व भीतीच्या आहारी जातील आणि शस्त्रास्त्रवाढीचा वेग शस्त्रास्त्रपातळीच्या प्रमाणात न वाढता शस्त्रास्त्रपातळीच्या वर्गाच्या प्रमाणात वाढेल अशी शक्यता आहे. या अरेषीयत्वामुळे शस्त्रास्त्रे आणि व्यापारविनिमय यातील समतोल नाहीसा होईल, शस्त्रास्त्रांची पातळी झपाट्याने वाढत जाईल आणि एखादी छोटीशी ठिणगीही मग युद्धाचा वणवा भडकविण्यास पुरेशी होईल.

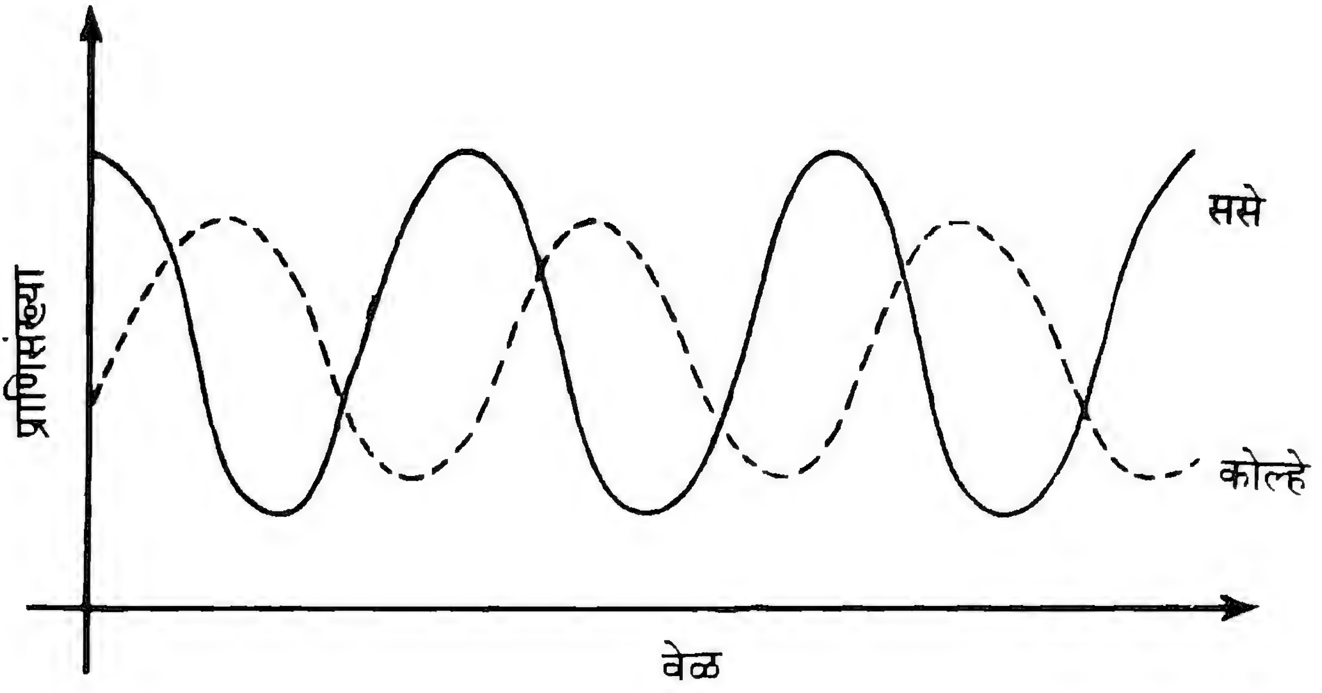
अशा प्रकारे अरेषीयत्वामुळे भडका उडण्याची शक्यता असलेली परिस्थिती संतुलित केली जाते (रस्त्यातील भांडण) वा संतुलनात असलेल्या स्थितीचे (शांतता) रूपांतर एखाद्या महासंकटात (युद्ध) केले जाते. त्या त्या परिस्थितीतील अरेषीयत्व कोणत्या प्रकारचे पश्चभरण म्हणजे फीडबॅक निर्माण करते यावर हे अवलंबून असते. रस्त्यावरच्या भांडणात आवाजपातळी वाढली की पश्चभरण ती कमी करते. उलट शांततेचे युद्धपरिस्थितीत रूपांतर होताना वाढलेली शस्त्रास्त्रपातळी पश्चभरणामुळे अधिक वाढत जाते, व त्यामुळे शत्रुत्वभावना झपाट्याने वाढते. युद्ध हा धन पश्चभरण असलेल्या अरेषीयत्वाचा परिणाम आहे. काही प्रसंगी मात्र अरेषीयत्वामुळे संतुलनस्थितीही येत नाही वा संकटस्थितीही कोसळत नाही. उलट संहती आवर्ती वा चक्रीय स्थितीत फिरत राहते. उदाहरणार्थ प्रसिद्ध सावज-शिकारी प्रश्न.

कोल्हे आणि ससे यांचे वास्तव्य असलेल्या एका बेटाची कल्पना करा. येथे सशांसाठी भरपूर, जवळजवळ अमर्याद, अन्नसाठा उपलब्ध आहे, आणि कोल्हे सशांची शिकार करून उपजीविका करतात. सशांच्या संख्येच्या वाढीचा दर दोन विरोधी घटकांवर अवलंबून आहे : एक, अमर्यादित अन्नपुरवठा असलेल्या परिसराशी निगडित संख्यावाढीचा दर - हा धन (+) घटक आहे; दुसरा घटक म्हणजे सशांची कोल्ह्यांबरोबर किती वेळा गाठ पडते ती संख्या - हा ऋण घटक आहे. कोल्ह्यांच्या संख्येच्या वाढीचा दरही असाच दोन विरोधी घटकांवर अवलंबून आहे. एक (ऋण) - सशांच्या अनुपलब्धतेशी निगडित मृत्यूचा दर; दोन (धन) - सशांशी पडणाऱ्या भेटीगाठींच्या संख्येशी संबंधित. व्ही. व्होल्टेरा यांनी प्रथम मांडलेल्या एका साध्यासोप्या प्रतिमानात एका तासात वा दिवसात पडणाऱ्या ससे व कोल्हे यांच्या भेटीगाठींची संख्या त्यांच्या प्रत्येकी प्राणिसंख्यांच्या गुणाकाराच्या प्रमाणात असते असे मानले आहे. या प्रश्नात आढळणाऱ्या अरेषीयत्वाचा उगम या घटकात आहे.

या प्रश्नाचे गणिती उत्तर काढणे खूपच अवघड आहे. त्यामुळे कोल्हे व ससे यांच्या संख्यांत कसे बदल होतील हे आपण गुणात्मक पातळीवर पाहू या. सशांची संख्या भरपूर आहे अशा स्थितीपासून आपण आरंभ करू या. या वेळी कोल्ह्यांना भरपूर भक्ष्य उपलब्ध आहे, त्यामुळे त्यांची संख्या वाढीस लागेल व सशांची रोडावू लागेल. जेव्हा कोल्हे फारच जास्त होतील व ससे फारच कमी होतील तेव्हा बेटावर कोल्ह्यांच्या दृष्टीने दुष्काळी परिस्थिती निर्माण होईल व त्यांची संख्या कमी होऊ लागेल. सशांच्या दृष्टीने ही चांगली गोष्ट असल्याने त्यांची संख्यावाढ सुरू होईल. ही संख्या पुरेशी वाढली की आपण पुन्हा एकदा प्रारंभीच्या स्थितीवर येऊ आणि मग एक आवर्तन संपून दुसरे तसेच आवर्तन सुरू होईल. कोल्हे व ससे यांच्या संख्येची अशी आवर्तने अखंड होत राहतील. या दोन आवर्तनांतील निश्चित संबंध खूपच जटिल व किचकट आहेत. परंतु व्होल्टेराच्या प्रतिमानानुसार सावज व शिकारी यांच्या संख्येतील परस्पर निगडित आवर्तने आकृती 2.3 मध्ये उदाहरणार्थ म्हणून दाखविली आहेत.

पर्यावरणशास्त्रात अशा परस्परसंबंधी प्राणिजातींच्या संख्येतील बदलांचा व चढ-उतारांचा अभ्यास केला जातो. हे शास्त्र प्राण्यांच्या जीवशास्त्रीय तपशिलात शिरत नाही, तर विविध प्राणिसमूहांची वा प्राणिजातींची एकमेकांशी तसेच भोवतालच्या परिसराशी कशा प्रकारे देवाणघेवाण चालते, आणि त्यातून पृथ्वीवरील प्राणिजीवनात कशा प्रकारे संतुलन, वाढ वा ऱ्हास होतो याचा विचार करते. प्राणिजातींतील परस्परक्रियांत नेहमीच अरेषीयत्वाचा घटक असतो. त्यामुळे त्यांची सापेक्ष संख्यावारी सतत बदलत असते. कधीकधी सावज-शिकारी प्रतिमानाप्रमाणे प्राणिसमूहांची संख्या आवर्ती स्वरूपात बदलत राहते. परंतु काही उदाहरणे अशीही आढळतात की त्यांत प्राणिसंख्या फारच अनियमितपणे, जवळजवळ स्वैरपणेच बदलते, आणि वरवर तरी कोणतेही कारण त्यामागे आढळत नाही. हे असे का व्हावे ?

एखाद्या संहतीच्या हालचालींत अनियमितता वा व्यामिश्रता आढळली की वैज्ञानिकांकडून दोन ठरावीक नमुनेदार स्पष्टीकरणे पुढे केली जातात. एक म्हणजे व्यामिश्र वर्तणूक त्या संहतीच्या व्यामिश्र स्वरूपाशी निगडित आहे. प्राणिसंख्या अनियमितपणे



आकृती 2.3 : अरेषीय सावज-शिकारी प्रतिमानातील प्राणिसंख्यांतील आवर्ती बदल.

बदलते कारण अनेक प्राणिजाती व त्यांच्यामधील क्लिष्ट परस्परक्रिया येथे कार्यरत असतात. उलटपक्षी असेही होऊ शकते की ती संहती साधी व निश्चिततावादी नियमबद्ध असते, परंतु तिच्यावर भोवतालच्या परिस्थितीचे होणारे आघात स्वैरपणे बदलणारे असतात (उदाहरणार्थ जोरदार वारा वाहत असताना झाडावरून गळून पडलेल्या पानाची अनियमित हालचाल). परंतु वातावरणाची स्थिती वर्णन करण्यासाठी लागणाऱ्या चलांची संख्या खूप मोठी असते व त्यातील बरीच अज्ञात असतात. वातावरणातील स्वैर बदल या अज्ञात चलांमुळे होतात असे मानले जाते. याचा अर्थ वरील दोन्ही स्पष्टीकरणे एकाच वैज्ञानिक अंत:प्रज्ञेतून येतात : संहतीशी संबंधित ज्ञात व अज्ञात चलांची मोठी संख्याच व्यामिश्रतेस जन्माला घालण्यास कारणीभूत आहे. फक्त मोठ्या संख्येची 'मुक्तताकोटी' (degrees of freedom) असलेल्या संहतींतच व्यामिश्रता आढळून येऊ शकते.

परंतु हे एक मिथ्य असल्याचे कोलाहलाचा शोध लागल्यावर उघड झाले आहे. निश्चिततावादी नियमांनी बांधलेल्या, कोणत्याही प्रकारच्या संभवनीयतेला थारा नसलेल्या साध्यासरळ संहती (म्हणजे मुक्तताकोटीची संख्या कमी असणाऱ्या संहती) देखील अत्यंत तीव्र व्यामिश्रता दाखवितात, हे फार महत्त्वाचे ज्ञान कोलाहलाने मिळवून दिले आहे. हे घडून येण्यासाठी आवश्यक अट म्हणजे मूलभूत नियमांचे स्वरूप अरेषीय असले पाहिजे. कोलाहलाचे अस्तित्व म्हणजे त्या संहतीत अरेषीयत्व असल्याचा पुरावाच आहे. रॉबर्ट मे या भौतिकीतून जीवशास्त्राकडे वळलेल्या वैज्ञानिकाने ही मूलगामी दृष्टी जगाला सर्वप्रथम प्राप्त करून दिली.

अरेषीय समीकरणांतील एक साधेसोपे समीकरण म्हणजे 'पुरवठा समीकरण'. यावर संशोधन करीत असतानाच मे यांना कोलाहल व अरेषीयत्व यांमधील संबंधाचा साक्षात्कार झाला. मर्यादित अन्नपुरवठा असलेल्या परिसरात एखाद्या प्राणिजातीची संख्या कशा प्रकारे वाढते याचे प्रतिमान या समीकरणाद्वारे व्यक्त होते. प्राण्यांच्या अनेक जातींत प्रजोत्पादन

वर्षातील एका ठरावीक छोट्या काळातच होते. अशा जातींच्या बाबतीत प्राणिसंख्या एकेका वर्षास पृथकपणे, पायरीपायरीने बदलत जाते असे आपण मानू शकतो - एक वर्षभर ठरावीक संख्या, तर दुसऱ्या वर्षी त्यात एकदम बदल होऊन दुसरी संख्या या प्रकारे. गणितीय दृष्टीने सलगपणे होणाऱ्या बदलांपेक्षा असे पृथक, पायरीपायरीने होणारे बदल हाताळण्यास अधिक सोपे असतात. डिफरेंशियल म्हणजे अवकल समीकरणांऐवजी आपल्याला डिफरन्स म्हणजे फरक समीकरणांचा वापर करावा लागतो. पुरवठ्याचे फरक समीकरण तर इतके सरळसोपे आहे की ते सोडविण्यासाठी साधे शालेय गणित पुरेसे आहे. परंतु ते सोडविण्यासाठी करावी लागणारी अंकगणितीय आकडेमोड मात्र फार झपाट्याने किचकट होत जाते - किमान एक छोटा कॅलक्युलेटर हवाच, नाहीतर फार प्रगती करणे अशक्यच! खरे तर याच कारणामुळे संगणकाच्या आगमनापूर्वी या सोप्या समीकरणाच्या उत्तरांत दडलेली समृद्ध व व्यामिश्र रचना नजरेआड राहिली होती.

समजा Xn ही 'n' या वर्षातील एका प्राणिजातीची संख्या आहे. अमर्याद अन्न उपलब्ध असलेल्या वातावरणात एका वर्षाने, म्हणजे (n + 1) या वर्षी, ती $X_{n+1} = \lambda Xn$ इतकी होते. येथे λ हा प्राचल (पॅरमीटर) प्राणीसंख्येच्या वार्षिक वाढीशी जोडलेला आहे. येथे रेषीय बंधनमुक्त वाढ दिसून येते. चक्रवाढ व्याजाने मुदतीच्या ठेवीत ठेवलेला पैसा जसा वाढतो तशीच ही वाढ आहे. उदाहरणार्थ, चक्रवाढ व्याजाचा दर 15 टक्के असल्यास $\lambda = 1.15$ असतो. 100 रु.ची रक्कम एका वर्षात 115 रु. होते. हे पुढील वर्षाचे मुद्दल बनते व दुसऱ्या वर्षाअखेरची रक्कम $1.15 \times 115 = 132.25$ रु. होते. ठेवीच्या मुदतीवर जर काही मर्यादा नसेल आणि *बँकेने व्याजाचा दर बदलला* नाही तर एकूण रक्कम सतत वाढत जाईल हे उघडच आहे. एखाद्या प्राणिजातीची वाढ रेषीय पद्धतीने होत असेल तर प्राण्यांची संख्याही अशीच अमर्याद वाढत जाईल.

मर्यादित अन्न उपलब्ध असलेल्या परिसरात संख्यावाढ वेगळ्याच प्रकारे होईल. संख्यावाढीबरोबर मर्यादित अन्नासाठी होणारी स्पर्धा वाढत जाऊन मृत्युप्रमाणात वाढ होईल. याचा अर्थ असा होतो की वाढीचा प्राचल हा स्थिर, अचल राहणार नाही. या स्थितीत वाढीच्या प्राचलास समजा, λ_L म्हटले, तर λ_L हे प्राणीसंख्येचे फल (फंक्शन) बनते. उलटपक्षी रेषीय प्रतिमानात λ हा स्थिर, अचल असतो.

प्रत्यक्ष प्राणिसंख्या विचारात घेण्याऐवजी X हे चिन्ह त्या जातीची अपूर्णांकी संख्या दर्शविण्यासाठी वापरणे अधिक सोयीचे आहे. यात X म्हणजे प्रत्यक्षातील प्राणिसंख्या भागिले त्या मर्यादित वातावरणात शक्य असलेली महत्तम प्राणिसंख्या. अर्थातच X ची किंमत 0 व 1 यांच्या दरम्यान असणार. जेव्हा X ची किंमत कमी म्हणजे शून्याच्या जवळ असते तेव्हा त्या प्राणिसंख्येस अन्नपुरवठा मुबलक असतो. स्पर्धा जवळजवळ नसतेच आणि λ_L ची किंमत अमर्याद वातावरणातील या अचलाच्या जवळजवळ बरोबरीची असते. म्हणजे या टोकाच्या स्थितीत $X = 0$ असताना $\lambda_L = \lambda$ असतो. उलटपक्षी, जेव्हा X ची किंमत 1 जवळ जाऊ लागते तेव्हा वाढते मृत्युप्रमाण हा महत्त्वाचा घटक बनतो आणि λ_L ची किंमत शून्याजवळ सरकू लागते.

$\lambda_L = \lambda(1-X)$ हे समीकरण वरील दोन्ही अटी पूर्ण करते. म्हणजेच मर्यादित वातावरणातील प्राणिसंख्येचा बदल पुढील समीकरणाने दाखविला जातो -

$X_{n+1} = \lambda X_n (1-X_n)$

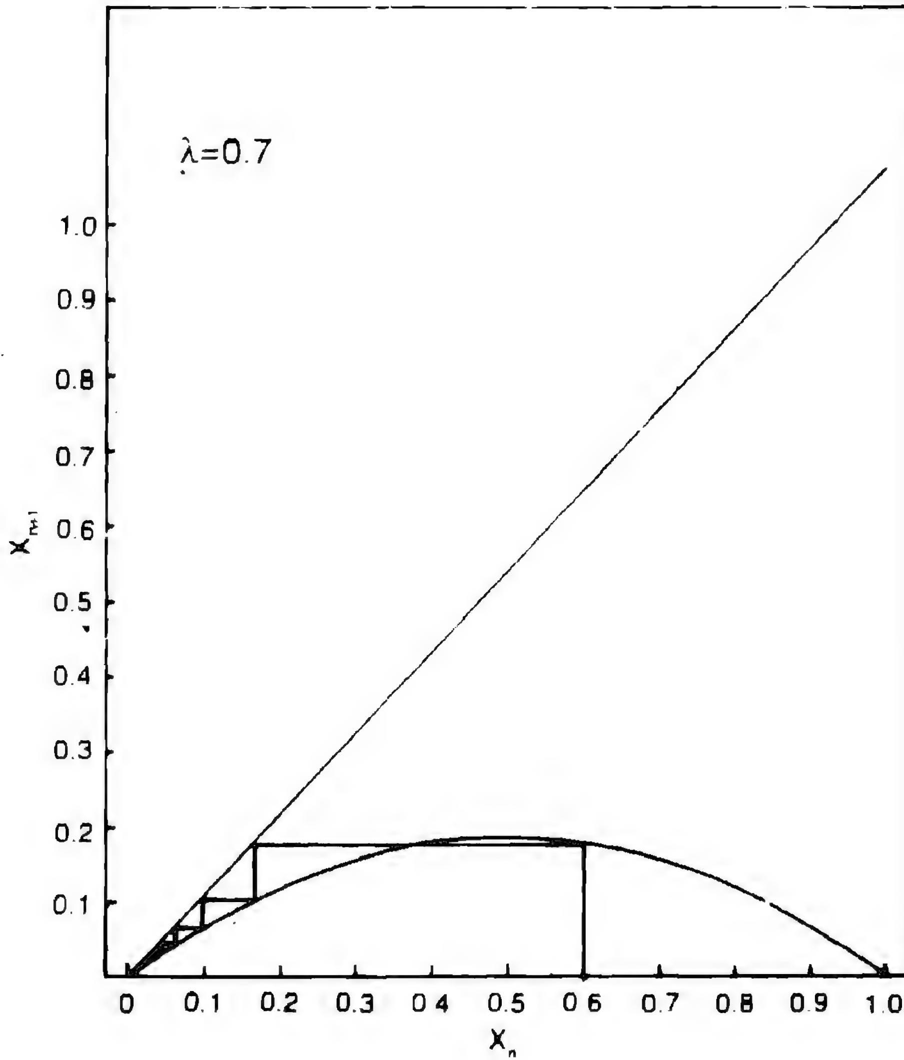
हेच ते प्रसिद्ध पुरवठा समीकरण. रेषीय समीकरणाशी तुलना करता λX_n^2 हा अरेषीय घटक येथे भरीस आला आहे हे लक्षात घ्या.

एखाद्या प्राणिजातीची संख्या वर्षावर्षाला कशी बदलत जाते हे आपल्याला पुरवठा समीकरणावरून समजते. पहिल्या वर्षीची प्राणिसंख्या X_1 असेल आणि आपल्याला λ ची किंमत माहीत असेल तर या समीकरणाद्वारे दुसऱ्या वर्षातील संख्या X_2 निश्चित होते. ह्याच समीकरणात X_2 सुरुवातीची संख्या म्हणून वापरल्यास तिसऱ्या वर्षातील प्राणिसंख्या X_3 कळून येते, वगैरे. आकडेमोडीच्या पहिल्या खेपेचा निकाल दुसऱ्या खेपेसाठी इनपुट म्हणून वापरून नवीन संख्या मिळवणे, ती तिसऱ्या खेपेचा इनपुट म्हणून वापरणे आणि असे अनंत वेळा करणे - या गणिती पद्धतीला पुनरावृत्ती (iteration) असे म्हणतात. येथे एक प्रश्न नैसर्गिकपणे उभा राहतो - या प्रकारे पुरवठा समीकरणाची पुनरावृत्ती करत गेल्यास आपण शेवटी एका निश्चित स्थिर किमतीच्या रोखाने पोहोचतो का? दुसऱ्या शब्दांत सांगायचे तर हे समीकरण लागू असलेल्या प्राणिजातीची संख्या अखेरीस समतोल स्थितीत पोहोचते का?

हा प्रश्न बराच कठीण आहे. खरे सांगायचे तर या प्रश्नाचे उत्तर शोधतानाच आपली गाठ थेट कोलाहलाशी पडते. परंतु सुरुवातीस आपण हा प्रश्न थोडा सोपा करू - प्राणिसंख्या जर समतोल स्थितीत पोहोचत असेल तर मग त्या संतुलित संख्येची किंमत किती? या प्रश्नाचे उत्तर सोपे आहे. समतोल स्थितीत जर प्राणिसंख्या X असेल तर पुरवठा समीकरणाची पुनरावृत्ती केल्याने ती संख्या बदलत नाही. जर $X_n = X$ असेल तर X_{n+1} सुद्धा X च असते. म्हणजेच $X = \lambda X (1-X)$. या समीकरणाची दोन उत्तरे येतात - $X = 0$ आणि $X = 1 - 1/\lambda$. म्हणजेच एखादी प्राणिजात जर समतोल स्थितीत पोहोचली असेल तर ती पूर्ण नष्टच झालेली असली पाहिजे ($X = 0$), किंवा तिची संतुलित संख्या λ च्या किमतीने निश्चित केलेली असली पाहिजे. (उदा. $\lambda = 2.5$ असेल तर $X = 0.6$). परंतु ती प्राणिजात संतुलित स्थितीत पोहोचेल की पोहोचणार नाही?

या प्रश्नाचे उत्तर आहे : ते λ च्या किमतीवर अवलंबून आहे. λ जर एकापेक्षा कमी असेल ($\lambda < 1$), तर प्राणिसंख्या दरवर्षी घटत जाऊन अखेरीस नष्ट होते. हा संतुलनाचा क्षुल्लक, बिनमहत्त्वाचा प्रकार झाला. आकृती 2.4 मध्ये $\lambda = 0.7$ या किमतीस पुनरावृत्ती कशी होत जाते हे आलेखरूपाने दाखविले आहे.

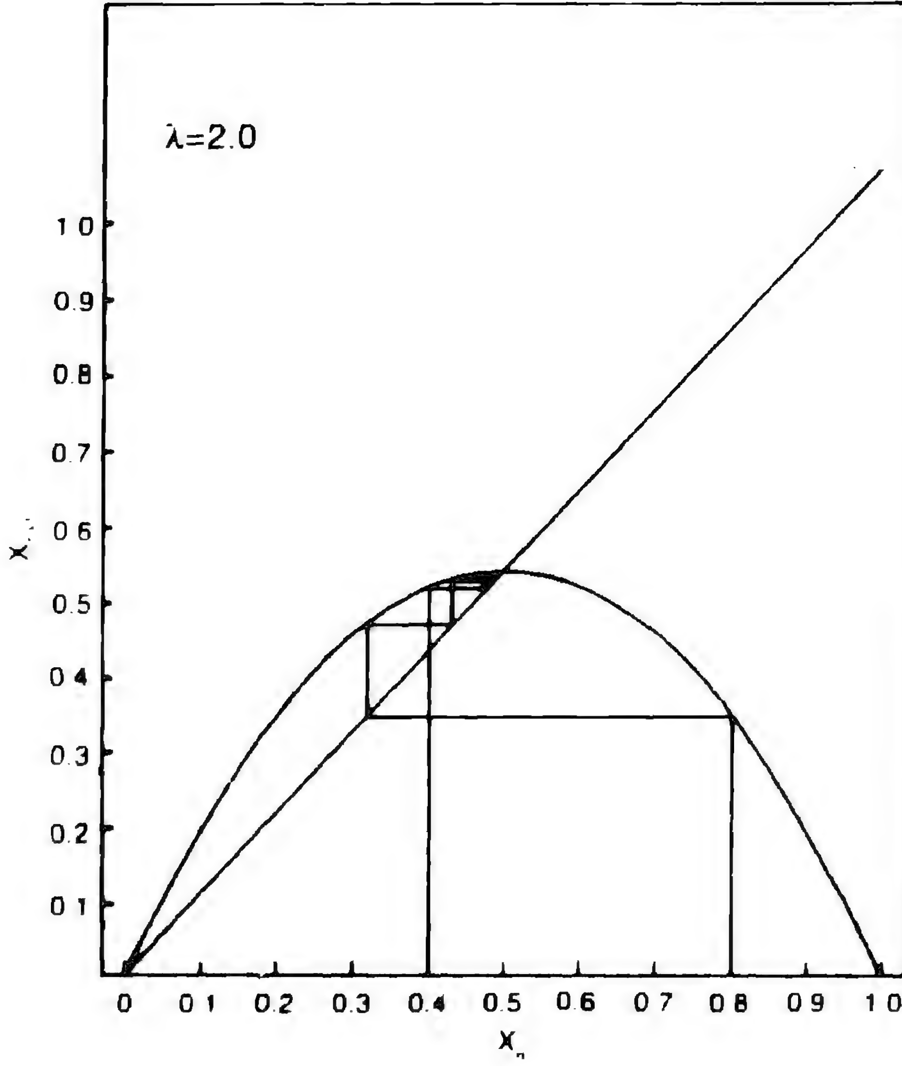
λ एकापेक्षा अधिक किमतीचा ($\lambda > 1$) असेल तर? आपण $\lambda = 2$ घेऊ आणि $X_1 = 0.8$ या किमतीपासून सुरुवात करू, दुसऱ्या वर्षातील प्राणिसंख्या होईल $X_2 = 2 \times 0.8 (1-0.8) = 0.32$. ही किंमत वापरून X_3 होईल $X_3 = 2 \times 0.32 (1 - 0.32) = 0.4352$. पुनरावृत्तीची ही क्रिया तशी साधीसरळ आहे, परंतु यातून बाहेर पडणारे आकडे अधिकाधिक किचकट होत जातात. एकेका पायरीवरील संख्येचे आकडे काढत प्राणिसंख्या अखेर एखाद्या विशिष्ट



आकृती 2.4 : $\lambda = 0.7$ आणि प्रारंभीची प्राणिसंख्या $X_1 = 0.6$ असतानाची पुरवठा समीकरणाची पुनरावृत्ती. प्राणिसंख्या येथे शून्याच्या रोखाने जाताना दिसते. $Y = \lambda X (1-X)$ या वक्राला छेदणाऱ्या उभ्या रेषा आपल्याला एका पिढीतून दुसऱ्या पिढीतील प्राणिसंख्येकडे नेतात. आडव्या रेषा $Y = X$ या रेषेला छेदून पुनरावृत्ती घडवून आणतात.

किमतीकडे येऊन पोहोचते की नाही हे बघण्यासाठी एक छोटा संगणक (निदान खिशात मावणारे गणनयंत्र तरी) वापरणे गरजेचे होऊन बसते. आणि याप्रमाणे आकडेमोड केल्यावर आकृती 2.5 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे प्राणिसंख्या निश्चित किमतीवर स्थिरावत असल्याचे स्पष्ट होते. ही संतुलित संख्या येते $X = 0.5$, आणि $X = 1 - 1/\lambda$ या सूत्राप्रमाणे येणाऱ्या उत्तराशी ती तंतोतंत जुळते. या ठिकाणी नोंद घेण्याजोगी महत्त्वाची गोष्ट म्हणजे अखेरची संतुलित संख्या प्रारंभीच्या संख्येवर अजिबात अवलंबून नसते, ती केवळ λ च्या किमतीनेच निश्चित ठरविली जाते. हे तपासण्यासाठी पूर्वीप्रमाणेच $\lambda = 2$ ठेवून प्रारंभीची संख्या बदला. समजा $X = 0.4$ असेल तर आकृती 2.5 वरून लक्षात येते की नवीन पुनरावृत्तीतही संतुलित संख्या आधीप्रमाणेच $X = 0.5$ राहते.

हे वैशिष्ट्य λ ची किंमत तीन होईपर्यंत कायम राहते. पुरेशा पिढ्यांनंतर ती प्राणिजात $X = 1 - 1/\lambda$ या सूत्रानुसार येणाऱ्या प्राणिसंख्येवर येऊन स्थिरावते. परंतु λ ची किंमत तीनपेक्षा वाढली की एक विलक्षण गोष्ट घडून येते. प्राणिसंख्या संतुलित अवस्थेत येऊन स्थिर होत नाही. उलट काही पिढ्यांच्या पुनरावृत्तीनंतर ती दोन वेगळ्या किमतींमध्ये हेलावत राहते, आंदोलन राहते. $\lambda = 3.2$ असता, होणारी स्थिती आकृती 2.6 मध्ये दाखविली आहे.

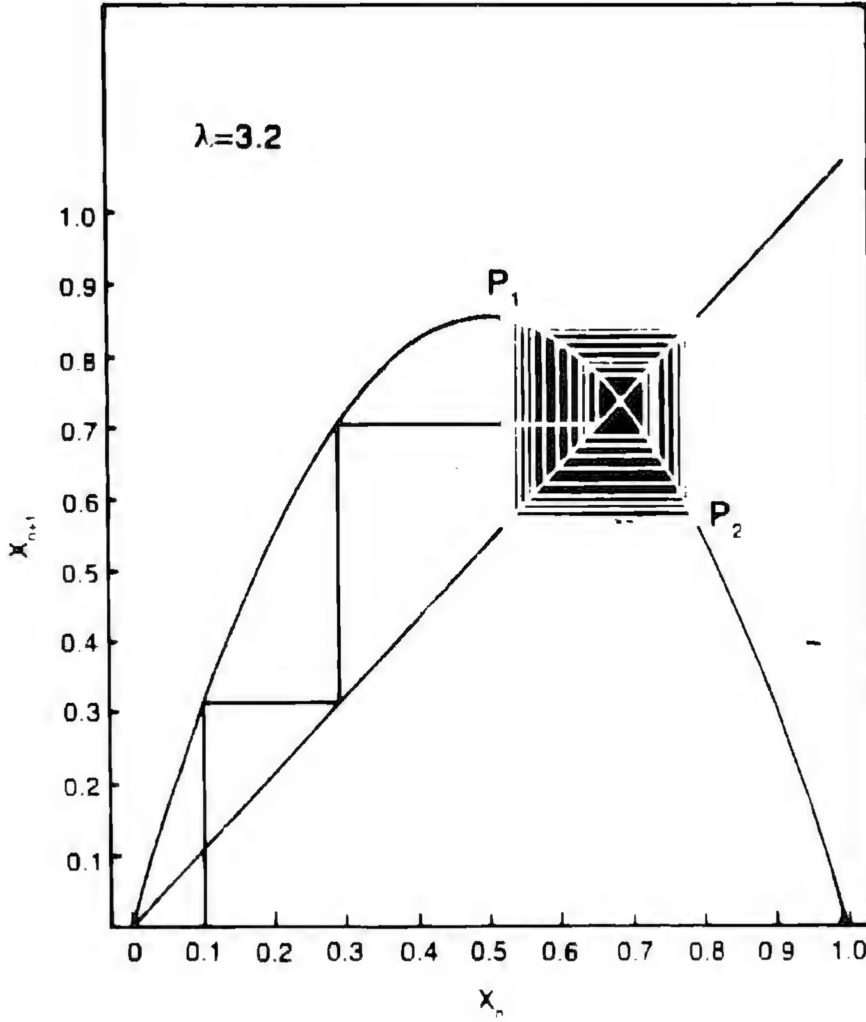


आकृती 2.5 : λ = 2 आणि प्रारंभीच्या दोन भिन्न संख्या (X_1 = 0.8 आणि X_1 = 0.4) घेऊन केलेली पुरवठा समीकरणाची पुनरावृत्ती. दोन्ही बाबतीत प्राणिसंख्या X = 0.5 या एकाच संतुलित किमतीवर येऊन स्थिरावते.

येथेही अखेरची स्थिती आरंभीच्या स्थितीवर अवलंबून नसते. प्रारंभी वेगवेगळ्या असणाऱ्या प्राणिसंख्या वेगवेगळ्या मार्गांनी जात अखेरीस समान संतुलित स्थितीत पोहोचतात. ही गोष्ट यापुढील सर्वच चर्चेला लागू पडणारी आहे, परंतु आकृत्या फार गिचमीड होऊ नयेत म्हणून हे त्यांत दाखविलेले नाही. आरंभस्थितीचा 'स्मृतिभ्रंश' होणे हे अरेषीय संहतींचे वारंवार आढळून येणारे वैशिष्ट्य आहे आणि या गोष्टीकडे आपण नंतर परत वळणार आहोत.

जेव्हा प्राणिसंख्या दोन वेगळ्या किमतींमध्ये हेलावत राहते तेव्हा दर दोन वर्षांनी एका किमतीची द्विरुक्ती होते. यालाच 'आंदोलनकाल दोन' स्थिती म्हणून संबोधले जाते. λ ची किंमत आणखी वाढवत नेली की एका विशिष्ट किमतीस (λ = 3.449499) 'आंदोलनकाल दोन'चे रूपांतर 'आंदोलनकार चार'मध्ये होते. याचा अर्थ आता अखेरच्या संथ स्थितीत प्राणिसंख्या चार वेगवेळ्या किमतींमध्ये हेलावत राहते. आकृती 2.7 मध्ये λ = 3.5 असतानाची 'आंदोलनकाल चार' स्थिती दाखविली आहे. आणखी पुढे λ = 3.544090 या किमतीस पुन्हा एकवार आंदोलनकाल दुप्पट होऊन 'आंदोलनकाल चार' स्थिती 'आंदोलनकाल आठ'मध्ये पदार्पण करते.

हा अनोखा प्रकार खीळ न बसता चालू राहतो. जसजशी λ ची किंमत वाढवत न्यावी. तसतशी आंदोलनकाल दुपटीमुळे प्राणिसंख्या आंदोलनकाल 16, 32, 64 अशा स्थितींत जात

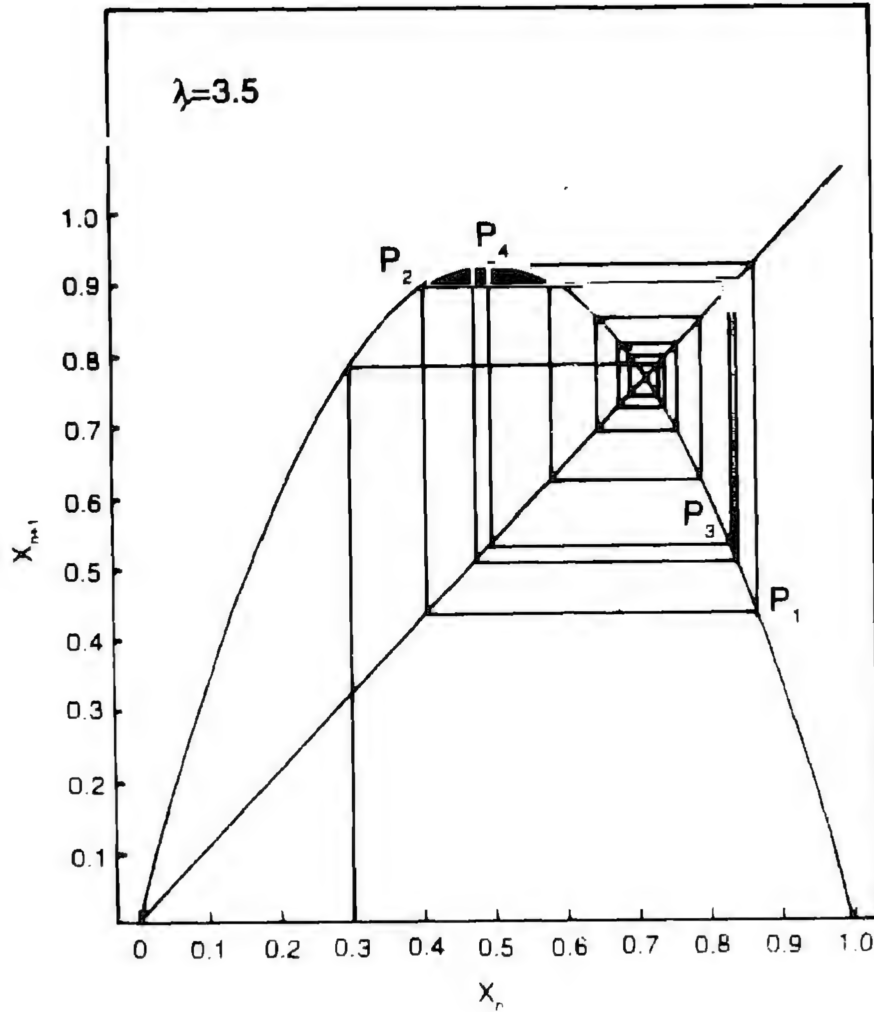


आकृती 2.6 : λ = 3.2 आणि X_1 = 0.1 असतानाची पुरवठा समीकरणाची पुनरावृत्ती. आरंभीच्या अल्पजीवी, अस्थिर हालचालीनंतर प्राणिसंख्या वक्रावर दर्शविलेल्या P_1 आणि P_2 या बिंदूंच्या किमतींमध्ये आंदोलत राहते. ('आंदोलनकाल दोन' स्थिती).

राहते. ही वैशिष्ट्ये आलेखरूपाने एकत्र दाखविण्याचा एक सोयीचा प्रकार म्हणजे आरंभीचे प्राणिसंख्येची वाढ दाखविणारे बदलते मार्ग विसरून जायचे व केवळ अखेरच्या संतुलित वा हेलकावणाऱ्या किमती विचारात घेऊन त्यांचा व λ या अरेषीय प्राचलाचा आलेख काढायचा. आकृती 2.8 मध्ये दाखविलेला हा आलेख द्विभाजन चित्र म्हणून संबोधला जातो.

आधीच्या आकृत्यांत आढळलेली वैशिष्ट्ये या चित्रात अध्याहृत आहेत. λ = 1 ते λ = 3 या विस्तारात फक्त एक सरळ रेषा आहे. प्रत्येक λ च्या किमतीशी जुळणारी एकच संतुलित प्राणिसंख्या असल्याचे यातून स्पष्ट होते. λ = 3 या ठिकाणी ही रेषा दुभंगून बेचकी तयार होते. 'आंदोलनकाल दोन' स्थिती सुरू झाल्याची ही खूण. पुढे λ = 3.449499 या किमतीस या दोन्ही रेषा दुभंगतात व 'आंदोलनकाल चार' स्थिती सुरू होते. हे असे प्रत्येक रेषेचे दुभंगणे अनंत वेळा होत राहते.

एकापाठोपाठ होत जाणाही ही दुभंगण्याची क्रिया λ च्या ज्या किमतींना होते त्यांतील फरक कमी कमी होत जातो. त्यामुळेच 'आंदोलनकाल अनंत' या स्थितीत पोहोचण्यासाठी λ ची किंमत फार वाढावी लागत नाही. आंदोलनकाल दुप्पट होण्याच्या λ च्या किमती जवळजवळ येत अखेर 3.569946 या किमतीसच आपण 'आंदोलनकाल

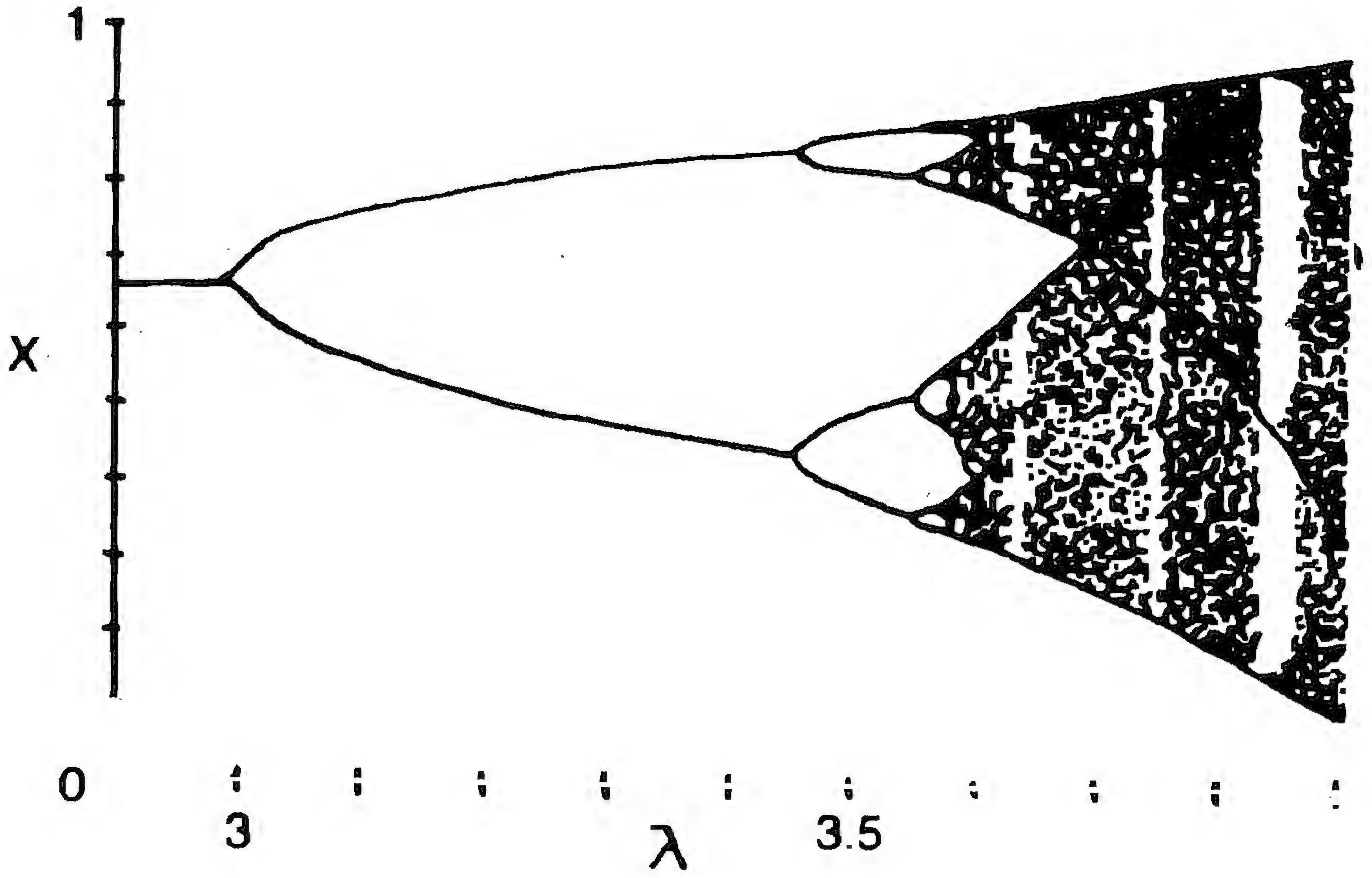


आकृती 2.7 : $\lambda = 3.5$ आणि $X_1 = 0.3$ असतानाची पुरवठा समीकरणाची पुनरावृत्ती. आरंभीच्या अल्पजीवी, अस्थिर हालचालींनंतर प्राणिसंख्या 'आंदोलनकाल चार' स्थितीत जाते आणि वक्रावर दर्शविलेल्या P_1, P_2, P_3, P_4 या बिंदूंच्या किमतींमध्ये आंदोलत राहते.

अनंत' स्थितीत पोहोचतो. म्हणजे $\lambda_\infty = 3.569946$. यापलीकडे λ ची किंमत गेल्यास प्राणिसंख्या कशीही अनियमितपणे बदलत जाते, पुनरावृत्ती न होता. ही कोलाहल स्थितीची सुरुवात. या स्थितीत द्विभाजन चित्रातील रेषा एकमेकींत मिसळून केवळ एक बिंदूंचा समूह नजरेत येतो.

प्राणिजातीची संख्या अनियमितपणे बदलत असणारी ही कोलाहल स्थिती अव्यवस्थेच्या स्थितीसारखीच भासते. याचा अर्थ असा लावायचा का की कोलाहल म्हणजे केवळ अनियमितपणाचेच दुसरे नाव आहे? सामान्य भाषेत ते खरेही असेल, पण या नवीन शास्त्रात कोलाहलातील अनियमितपणा केवळ वरवरचा, आभासी आहे. प्रत्यक्षात कोलाहलामागे एक सूक्ष्म, तरल नियमितपणा, एक विलक्षण कोड्यात टाकणारी रचना दडलेली आहे.

कोलाहल स्थितीची आपण अधिक खोलवर बारकाईने तपासणी केली तर पुरवठा समीकरणात ही रचना आढळून येते. $\lambda = 3.569946$ ला कोलाहल सुरू होतो. त्यापलीकडे गेल्यास नवनवीन आश्चर्ये आढळून येतात. λ च्या किमतीच्या काही विस्तारात प्राणिसंख्या बदलातील अनियमितपणा एकाएकी नाहीसा होतो, आणि त्याऐवजी 'आंदोलनकाल तीन' वा 'आंदोलनकाल सात' असलेली नवी आवर्तने सुरू होतात. दुसऱ्या शब्दांत सांगायचे तर



आकृती 2.8 : द्विभाजन चित्र (नमुना) - प्राणिसंख्येची अंतिम संतुलित किंमत व अरेषीय प्राचल λ यांचा आलेख.

कोलाहल स्थिती ही सलगपणे निव्वळ अनियमितता असलेली स्वैर स्थिती नाही. अव्यवस्थेच्या या भिंतीवर अधूनमधून सुव्यवस्थेच्या खिडक्या आढळून येतात. आश्चर्याची गोष्ट म्हणजे आपण या सुव्यवस्थित खिडक्यांची बारकाईने तपासणी केल्यास त्यात कोलाहलपूर्व स्थितीत आढळणारी द्विभाजनाची प्रक्रियाही आढळते. 'आंदोलनकाल तीन'चे आवर्तन द्विभाजन पावून आंदोलनकाल 6, 12, 24 इ. अवतरतात; तर आंदोलनकाल 7 चे आवर्तन 14, 28, 56 अशा पटीत वाढत जाते. यामागील संदेश स्पष्ट आहे - कोलाहल म्हणजे निव्वळ गोंगाट वा बिनतोंडवळ्याचा अनियमितपणा नव्हे.

हवामानतज्ज्ञाच्या दृष्टीने कोलाहल म्हणजे आरंभस्थितीवरील अतिसंवेदनाक्षम अवलंबित्वामुळे निश्चिततावादी नियमांतून निर्माण होणारा भाकीतक्षमतेचा अभाव. पर्यावरण वैज्ञानिकाच्या दृष्टीने कोलाहल म्हणजे निश्चिततावादी नियमांतून उद्‌भवणारे प्राणिसंख्येतील अनियमित चढउतार; परंतु या अनियमितपणात दडलेली असते स्वयंसदृश नियमितपणा असलेली एक अंतर्रचना. हे दोन्ही वैज्ञानिक एकाच गोष्टीबद्दल बोलत आहेत का? हो, निश्चितच! लॉरेन्झच्या हवामान प्रतिमानातील बदलांचा विशिष्ट प्रकारे आलेख काढल्यास त्यातून स्वयंसदृश रचना प्रकट होते. तसेच, पुरवठा समीकरणातील कोलाहल स्थितीतील प्राणिसंख्येतील बदल प्रारंभस्थितीवर अतिसंवेदनाक्षम रीतीने अवलंबून असतात. प्रारंभीच्या किमतीतील थोडासा फरक घातांकी झपाट्याने वाढत जातो. हा फरक 'ल्यापुनोव घातांक' नावाने ओळखल्या जाणाऱ्या संज्ञेने मोजला जातो. ल्यापुनोव घातांक ऋण असल्यास प्रारंभीचे फरक वाढत नाहीत व निश्चिततावादी नियम भाकीतक्षमता निर्माण

करतात. धन ल्यापुनोव घातांक मात्र कोलाहलाचा मार्ग दाखवितो. कोलाहल स्थितीत पुरवठा समीकरणाचा ल्यापुनोव घातांक धन असतो. त्यामुळे काही तांत्रिक फरक सोडल्यास लॉरेन्झ आणि मे हे दोघेही एकाच घटनेविषयी बोलत असतात असे म्हटले पाहिजे. ती म्हणजे 'निश्चिततावादी कोलाहल.'

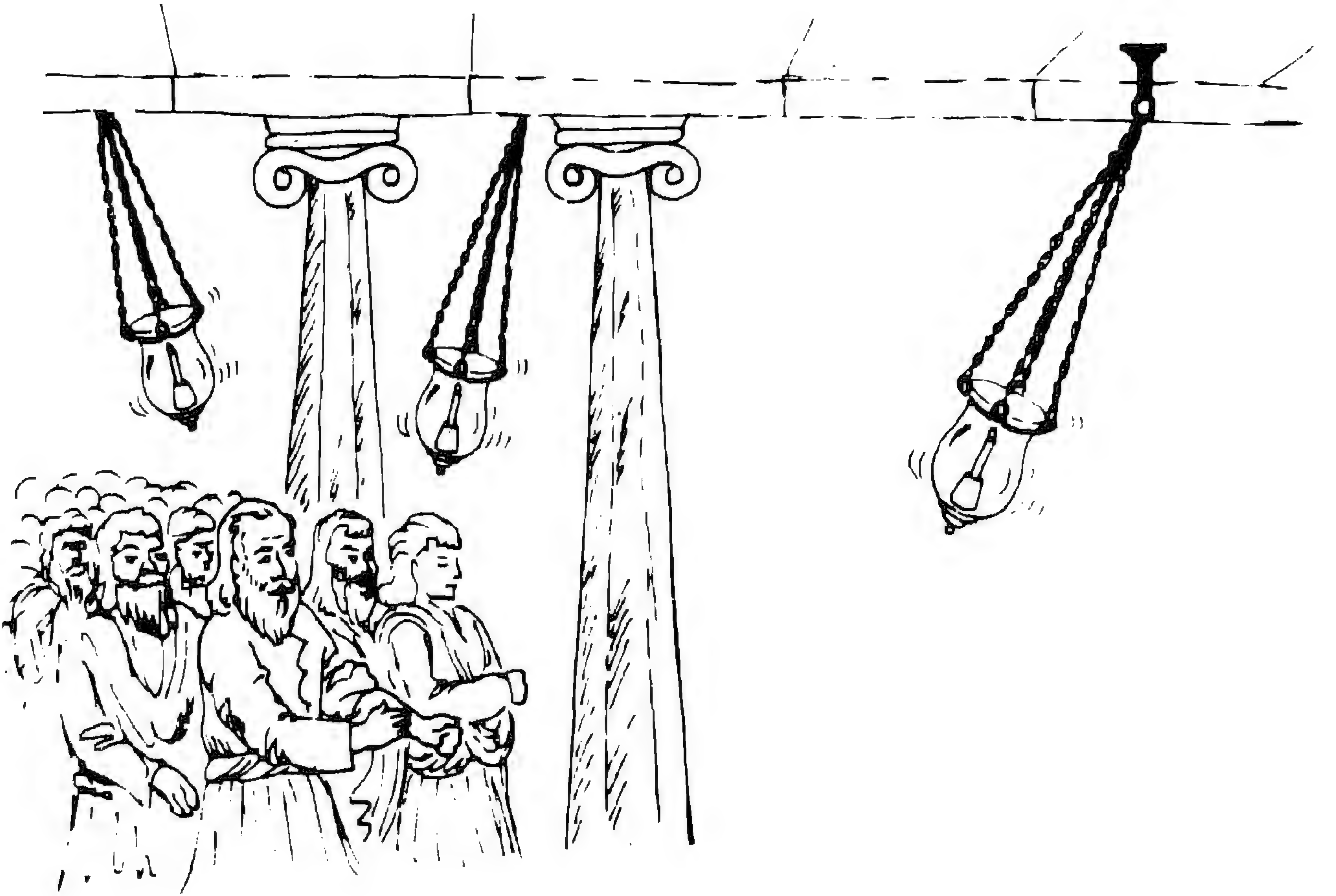
कोलाहलावरील बहुतेक पुस्तकांत पुरवठा समीकरणाचा उहापोह असतो. उदा. पाहा संदर्भ 17, 7, 4, 5 आणि 26.

तीन

चर्चमधील झुंबरे

सुमारे चारशे वर्षांपूर्वी पिसा येथील कॅथेड्रलमध्ये उभा असताना गॅलिलिओ गॅलिलेईच्या नजरेत त्या चर्चमधील लोंबकळणारी दिव्यांची झुंबरे भरली, अशी आख्यायिका आहे. आपल्या नाडीच्या ठोक्यांवरून गॅलिलिओने त्या झुंबरांच्या आंदोलनांचा काळ मोजला आणि प्रत्येक विद्यार्थ्याला सध्या परिचित असलेला नियम त्याने शोधून काढला. लंबकाच्या एका आंदोलनाला लागणारा वेळ त्या आंदोलनाच्या विस्तारावर (Amplitude) अवलंबून नसतो!

पुढे गॅलिलिओने हेही शोधून काढले की आंदोलनकाळ हा लंबकाच्या लांबीच्या वर्गमुळाच्या प्रमाणात बदलतो.



आकृती 3.1 : पिसा येथील चर्चमधील लोंबकळणारी दिव्यांची झुंबरे. रेषीय लंबकाचे मूलभूत नियम गॅलिलिओने येथेच शोधून काढले अशी आख्यायिका आहे.

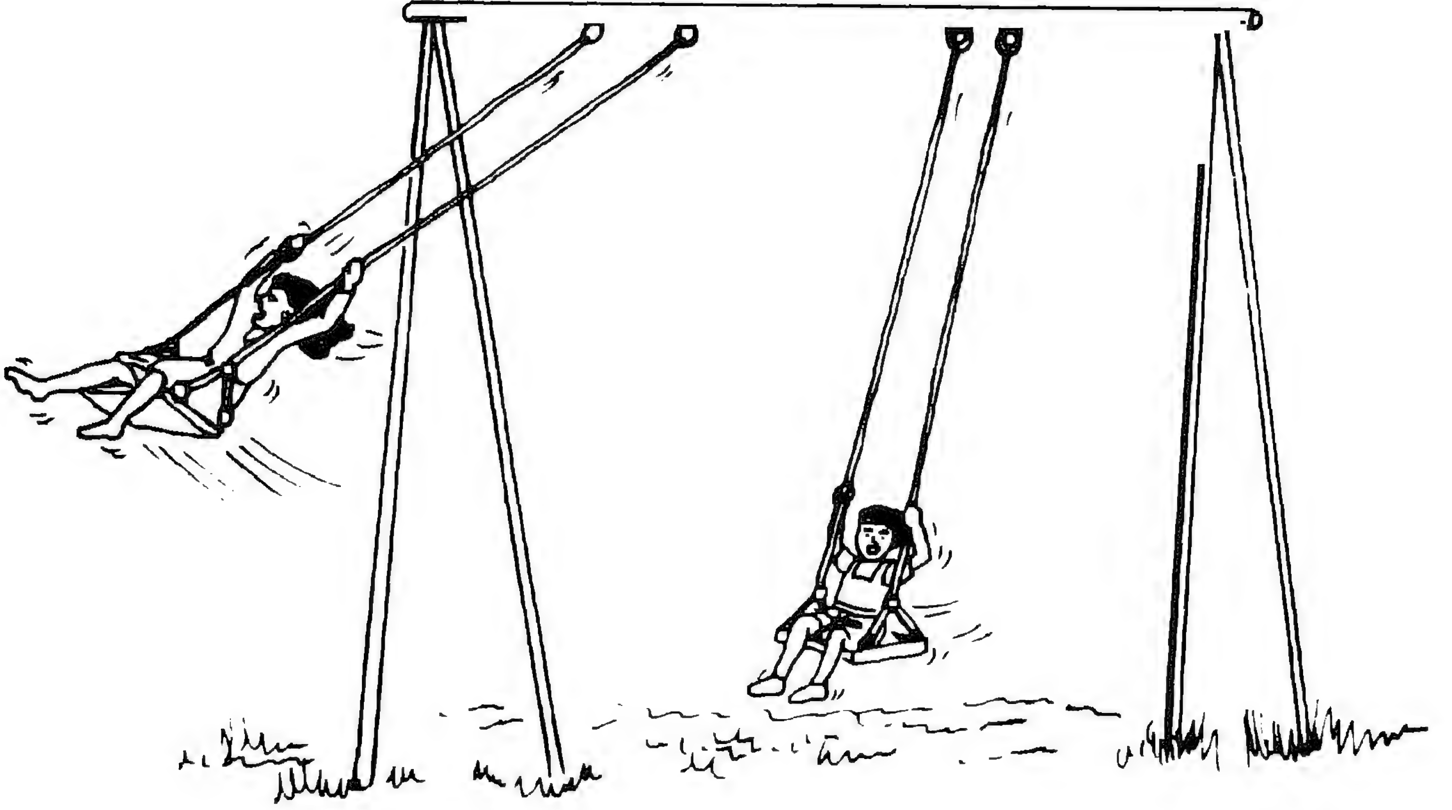
गॅलिलिओच्या, तसेच पुढील चार शतकांतील विज्ञानाच्याही, सुदैवाने चर्चमधील त्या लोंबकळणाऱ्या दिव्यांचे हेलकावे विस्तृत नव्हते. ती झुंबरे अगदी छोटेखानी झोके घेत होती. तशी स्थिती नसती तर गॅलिलिओ अरेषीय लंबकाच्या हालचालींच्या क्लिष्ट तपशिलात गुंतून पडला असता. शिवाय त्याच्या हातून हाकारलेल्या, चालित लंबकीय आंदोलनातील कोलाहलाचा शोध लागण्याचीही काही शक्यता नव्हती. कारण गॅलिलिओची बौद्धिक ताकद प्रचंड असली तरी आधुनिक संगणकाची आकडेमोडक्षमता काही त्याच्यापाशी नव्हती. कोलाहलाचा शोध लागण्यास मात्र ती अत्यावश्यक आहे.

आश्चर्याची गोष्ट म्हणजे असा प्रकार विज्ञानात बऱ्याच वेळा घडलेला आहे. एका विज्ञान भाष्यकाराच्या म्हणण्याप्रमाणे वैज्ञानिक प्रगतीसाठी आपणास सत्य माहीत पाहिजे, परंतु पूर्ण सत्य मात्र नको. गॅलिलिओने शोधून काढलेला नियम फक्त अंशत: सत्य होता, परंतु तो विज्ञानाच्या वाढीस खूपच उपयुक्त ठरला. आंदोलनाचा कोन लहान असतो तेव्हा लंबकाची हालचाल जवळपास सरळ रेषेत होत असते, आणि लंबकाला मागे खेचणारे पुन:स्थापी बल हे त्याच्या मध्यवर्ती स्थानापासूनच्या अंतराच्या समप्रमाणात असते. दुसऱ्या शब्दांत सांगायचे तर आंदोलने लहान असतात तेव्हा लंबक ही रेषीय संहती (linear system) असते. त्या हालचालीचा नियम रेषीय समीकरणातून व्यक्त होतो आणि लंबकाचा आंदोलनकाल आंदोलनविस्तारावर अवलंबून नसतो. रेषीय लंबक ही पारंपरिक विज्ञानातील शानदार आदर्श संहती आहे. पूर्णांशाने सोडविता येणारी आणि अनेकविध परिस्थितीत खूप उपयुक्त ठरणारी. ही उपयुक्तता जोसेफ फूरिये या फ्रेंच गणितज्ज्ञाने गेल्या शतकात सिद्ध केलेल्या एका मूलभूत निकालावर आधारित आहे. फूरियेने सिद्ध केले होते की कोणतीही सर्वसाधारण आवर्ती स्वरूपाची हालचाल ही विशिष्ट आंदोलनकाल व आंदोलनविस्तार असलेल्या साध्या, लंबकसदृश हालचालींच्या बेरजेतूनच उभी राहते. परंतु कोलाहल विज्ञानाच्या दृष्टीने विचार केला तर रेषीय लंबक ही काही विशेष रस घेण्याजोगी प्रणाली नाही. लंबक जेव्हा खूप मोठी आंदोलने घेऊ लागतो तेव्हाच खरी मजा सुरू होते.

आंदोलनाचा विस्तार मोठा झाला की लंबकाला मागे खेचणारे पुन:स्थापी बल हे त्याच्या मध्यवर्ती स्थानापासूनच्या अंतराच्या समप्रमाणात राहत नाही, तर ते अरेषीय पद्धतीने बदलते.

जर θ हे लंबकाचे कोनीय विस्थापन (angular displacement) असेल तर त्यावरील पुन:स्थापी बल $\sin \theta$ च्या प्रमाणात बदलते, आणि $\sin \theta$ तील θ नुसार होणारा बदल हा अरेषीय असतो. θ ची किंमत खूप कमी असते तेव्हा $\sin \theta$ जवळजवळ θ एवढाच असतो. त्यामुळे आंदोलने छोटी असतात तेव्हाच फक्त लंबक रेषीय स्थितीत असतो. अरेषीय लंबकाचा आंदोलनकाल त्याच्या आंदोलनविस्तारावर अवलंबून असतो. जसजसा आंदोलनविस्तार वाढतो तसतसा आंदोलनकाल वाढत जातो. लंबकाला जसजशी अधिकाधिक ऊर्जा देत जावी तसतशी त्याची आंदोलने विस्तारत जातात व अखेरीस तो वर्तुळाकार कक्षेत फिरू लागतो. या वेळची लंबकाची हालचाल ही चक्राकार (rotational) व आंदोलनीय (oscillatory) हालचालींचे मिश्रण असते. चक्राकार म्हणण्याचे कारण असे

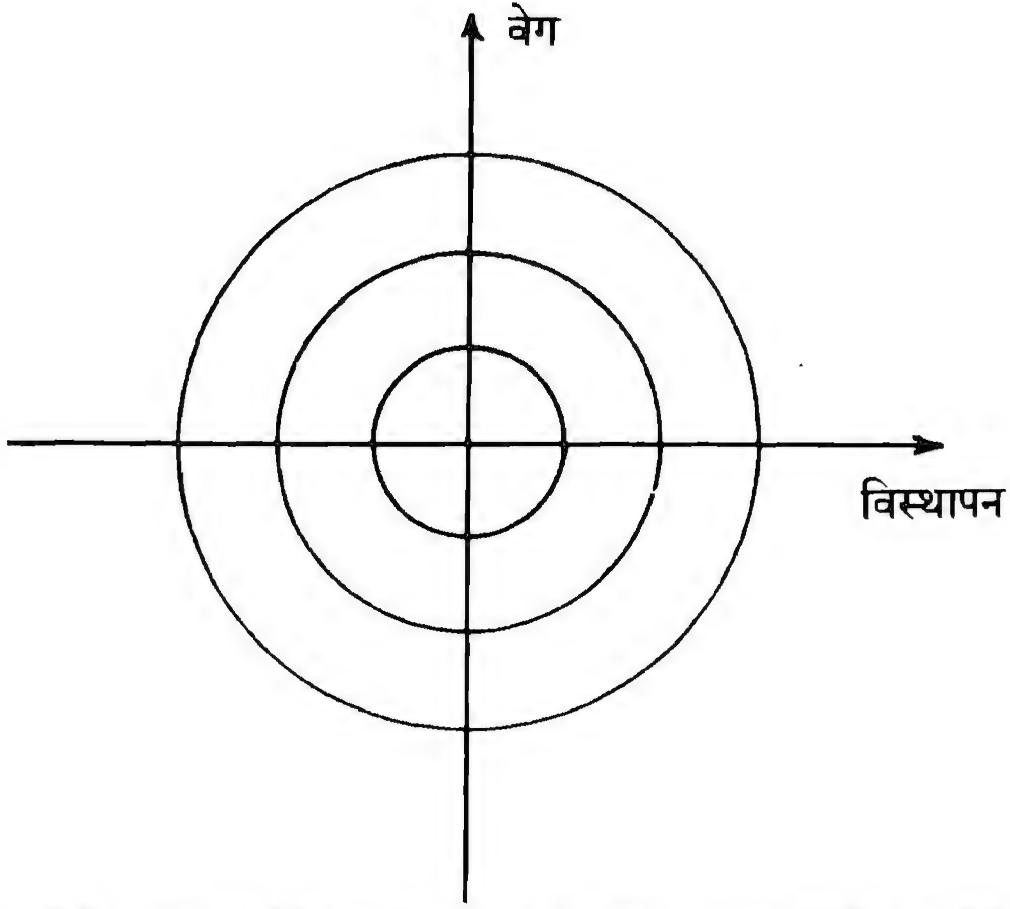
की, तो वर्तुळात फिरत असतो व आंदोलनीय म्हणण्याचे कारण म्हणजे तो मूळच्या उभ्या स्थितीकडे सतत खेचला जात असतो.



आकृती 3.2 : बागेतील झोपाळा. मोठा झोका घेतल्यास त्याच्या विस्ताराप्रमाणे आंदोलनकालही वाढतो.

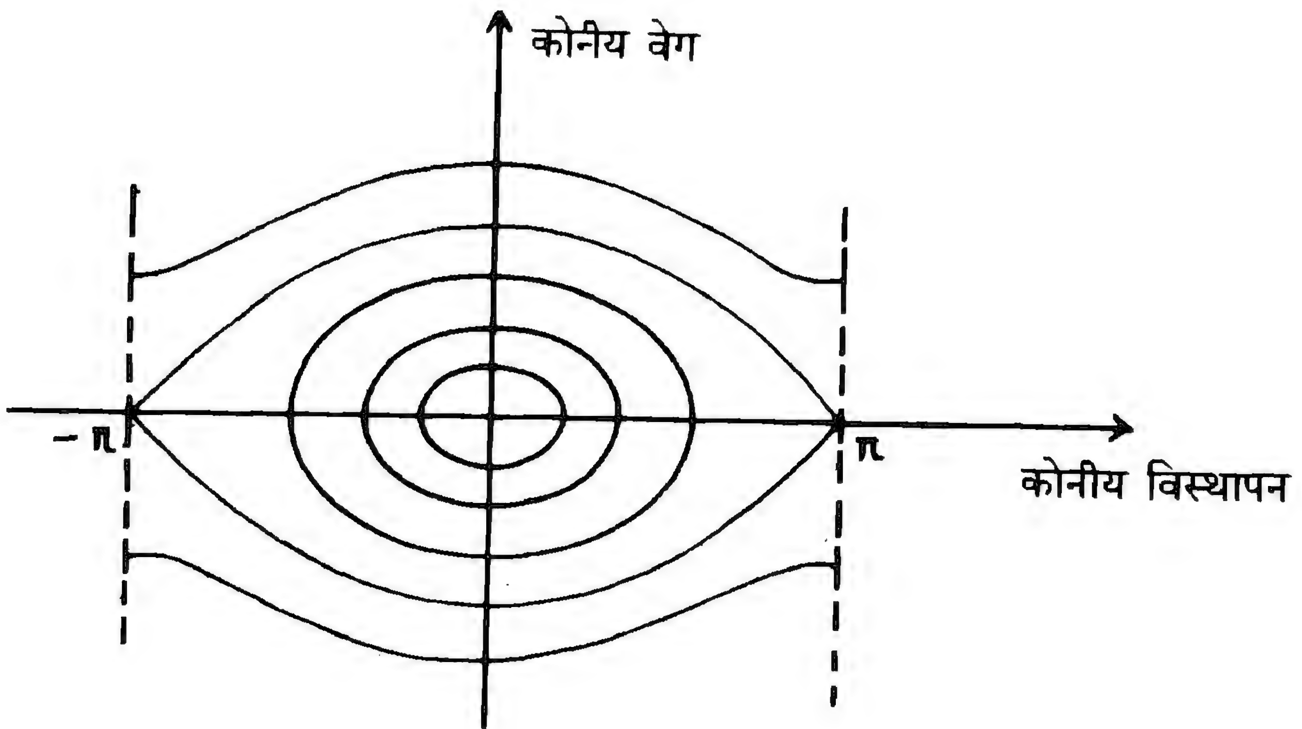
ही हालचाल एका आकृतीद्वारे सोयीस्करपणे वर्णन करता येते. X-अक्ष आपण लंबकाचे त्याच्या मध्यवर्ती स्थानापासूनचे (कोनीय) विस्थापन दाखविण्यासाठी वापरू व Y-अक्षावर त्याचा (कोनीय) वेग दाखवू. कोणत्याही एका क्षणी त्या लंबकाच्या हालचालीची स्थिती X-Y पातळीतील एका बिंदूने दशविली जाते. लंबक हलू लागतो तसे त्याचे स्थान व वेग बदलू लागतात आणि X-Y पातळीवर त्याची स्थिती दर्शविणारा बिंदू एक मार्गरेषा उमटवू लागतो. ह्या X-Y पातळीला त्या लंबकाचे प्रावस्थाअवकाश असे संबोधले जाते. वस्तूमात्राच्या हालचाली चालू असतात ते आपल्याभोवतीचे प्रत्यक्ष अवकाश म्हणजे हे प्रावस्थाअवकाश नव्हे. एखाद्या संहतीच्या गतिस्थितीचे भूमितीय चित्र उभे करण्यासाठी वैज्ञानिक वापरत असलेली ही एक गणिती रचना आहे. लंबकाचे प्रावस्था अवकाश एका पातळीतील म्हणजे द्विमिती आहे. ज्या संहतीत अधिक चले असतात त्यांचे वर्णन करण्यास अधिक मितीच्या प्रावस्था अवकाशाची गरज असते.

रेषीय लंबकाची प्रावस्था अवकाशातील मार्गरेषा वर्तुळाकार असते. एका ठरावीक काळानंतर लंबकाच्या हालचालीची द्विरुक्ती होते, त्यानुसार प्रावस्था अवकाशातील प्रतिनिधी बिंदू एक वर्तुळाकार आवर्तन पूर्ण करतो. लंबकाची ऊर्जा जितकी जास्त, तितकी त्या वर्तुळाची त्रिज्या मोठी असते. परंतु प्रत्येक वर्तुळाभोवती फिरण्याचा कालावधी मात्र सारखाच असतो.



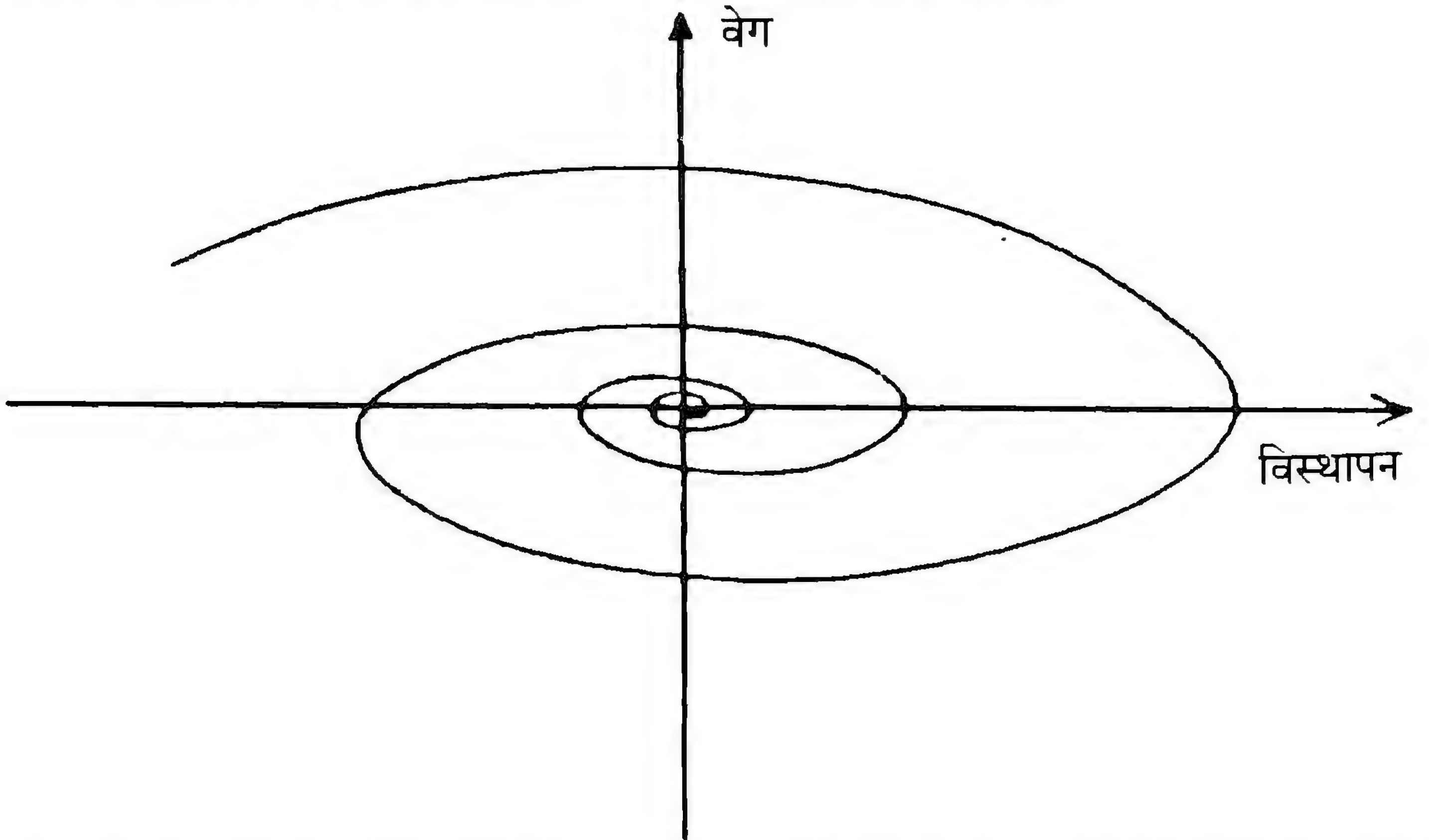
आकृती 3.3 : रेषीय (अनवमंदित) लंबकाच्या प्रावस्था अवकाशातील मार्गरेषा - ऊर्जेच्या वेगवेगळ्या किमतीनुसार.

अरेषीय लंबकाची हालचाल ही आवर्ती स्वरूपाची असते. जोपर्यंत ती आंदोलनीय असते तोपर्यंत या लंबकाची प्रावस्था अवकाशातील मार्गरेषा रेषीय लंबकाप्रमाणेच बंदिस्त वलयाकृती असते, फक्त ते वलय वर्तुळाकार नसून लंबवर्तुळाकार असते. जेव्हा लंबकाची ऊर्जा पुरेशी वाढून तो पूर्ण वर्तुळात गरगर फिरू लागतो तेव्हा त्याची प्रावस्था अवकाश मार्गरेषा वेगळीच असते. लंबकाची हालचाल गरगरणे आणि आंदोलने यांचे मिश्रण असल्याचे त्यातून प्रतिबिंबित होते.



आकृती 3.4 : अरेषीय (अनवमंदित) लंबकाच्या प्रावस्था अवकाशातील मार्गरेषा.

प्रत्यक्षात कोणत्याही लंबकाची आंदोलने अनिश्चित काळ चालू राहत नाहीत, मग तो लंबक रेषीय असो वा अरेषीय. याचे कारण म्हणजे लंबकाचे भोवतालच्या हवेशी, तो जेथून लोंबकळत असतो त्या बिंदूशी होणारे घर्षण. या घर्षणामुळे लंबकाची हालचाल अवमंदित होते, मंदावली जाते. उष्णतेत रूपांतरित झाल्याने लंबकाची ऊर्जा सातत्याने कमी होत जाते, व अखेरीस लंबकाचे आंदोलन थांबते. अशा अवमंदित लंबकाची प्रावस्था अवकाशातील मार्गरेषा बंदिस्त वलयाकृती असू शकत नाही, कारण ही संहती कधीच आपल्या प्रारंभीच्या गतिस्थितीत परतत नाही. ऊर्जा कमी कमी होत जात असल्याने ही मार्गरेषा सतत कमी होत जाणाऱ्या त्रिज्येचे एक सर्पिल (spiral) असते, व ते प्रावस्था अवकाशाच्या उगमबिंदूकडे येऊन थांबते. हा बिंदू लंबक उभाचा उभा स्थिर असल्याचे दर्शवितो.



आकृती 3.5 : अवमंदित लंबकाची प्रावस्था अवकाशातील मार्गरेषा उगमबिंदूकडे गरगरत येणारे एक सर्पिल (spiral) असते.

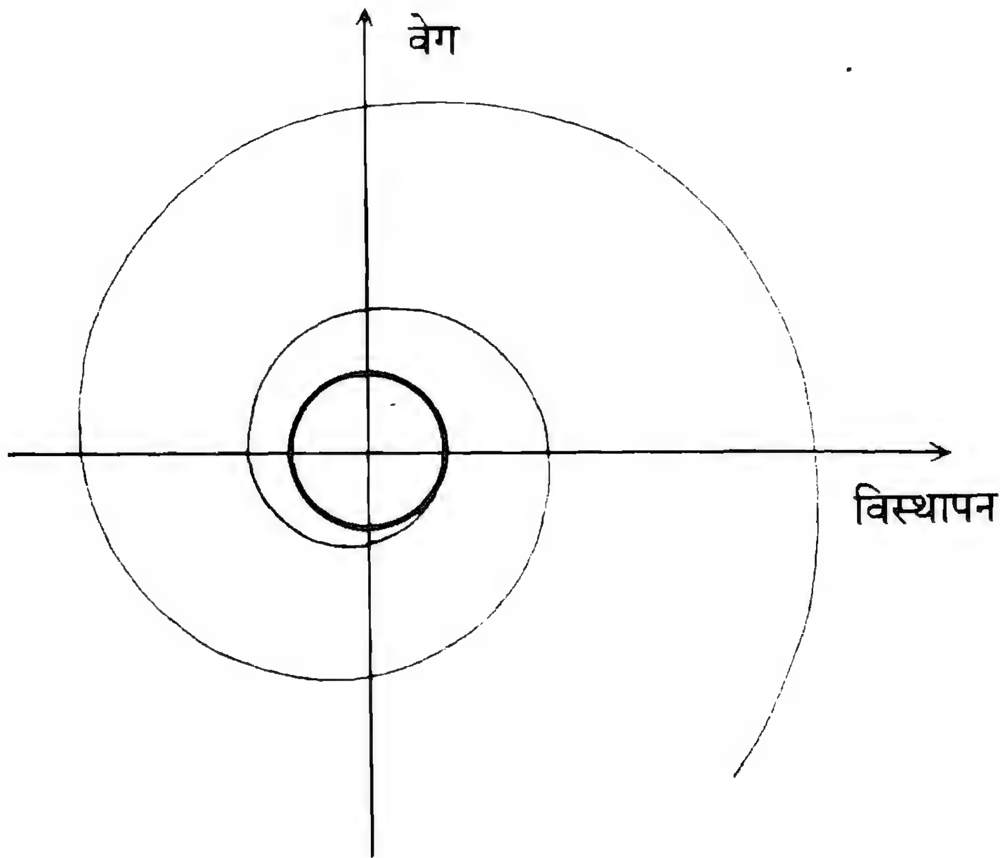
अवमंदित लंबकाचा अंत असा होऊ द्यायचा नसेल तर काय करावे लागेल? उघडच आहे की, अवमंदनामुळे होत असलेल्या ऊर्जेचा क्षय भरून काढण्यासाठी लंबकाला बाहेरून सतत ऊर्जापुरवठा केला पाहिजे. याचा अर्थ कोणत्यातरी बाह्य घटकाद्वारे लंबक हाकारला पाहिजे, त्याचे चालन केले पाहिजे. उदाहरणार्थ, भिंतीवरल्या घड्याळाचे काटे वर्तुळाकार आवर्ती फेरे मारत असतात. हे काटे त्या घड्याळात बसविलेल्या विद्युतघटातील ऊर्जेमुळे हाकारले जातात, चालविले जातात. म्हणूनच हा घट मधूनमधून बदलावा लागतो. या वेळी आपणासमोर अवमंदित चालित लंबकाचे उदाहरण असते.

समजा आपण एक रेषीय अवमंदित लंबक एका बाह्य आवर्ती शक्तीद्वारे चालविला. उदा. दोन लंबक ज्या बिंदूंना टांगले असतील ते बिंदू जर एकमेकांशी जोडले तर एक लंबक दुसऱ्या लंबकाकडून चालविला जातो. यांत्रिक लंबकाला समतुल्य अशी विद्युतरचना म्हणजे धारिता (C), प्रेरितता (L), व रोध (R)यांचा समावेश असलेले विद्युतमंडल. असे LCR

मंडल जर बदलत्या प्रवाहाच्या, प्रत्यावर्ती धारेच्या (A.C.) स्रोतास जोडले तर त्याचे वर्तनही बाह्य आवर्ती शक्तीद्वारे चालविलेल्या अवमंदित लंबकासमानच असते.

लंबकाचा स्वत:चा एक नैसर्गिक आंदोलनकाल असतो, तर बाह्य शक्तीचा आपला एक वेगळा आवर्तनकाल असतो. अशा वेळी लंबकाचा आंदोलनकाल कोणता असतो? प्रयोगान्ती लक्षात येते की, प्रारंभीच्या वेड्यावाकड्या हालचालींनंतर अखेर लंबक त्या बाह्य शक्तीच्या कह्यात जातो व तिच्या आवर्तनकालानुसार आंदोलू लागतो. लंबकाचा नैसर्गिक आंदोलनकाल त्या बाह्य शक्तीच्या आवर्तनकालाच्या जवळपासच असेल तर उत्तम. मग तो लंबक पूर्ण जोमाने मोठ्या आंदोलनविस्तारात हिंदकळू लागतो. तसे नसेल तर मात्र लंबकाचा आंदोलनविस्तार छोटाच राहतो. मात्र दोन्ही प्रकारांत बाह्यशक्ती जोवर कार्यान्वित असते तोवरच लंबकाची आंदोलने एकसारखी चालू राहतात.

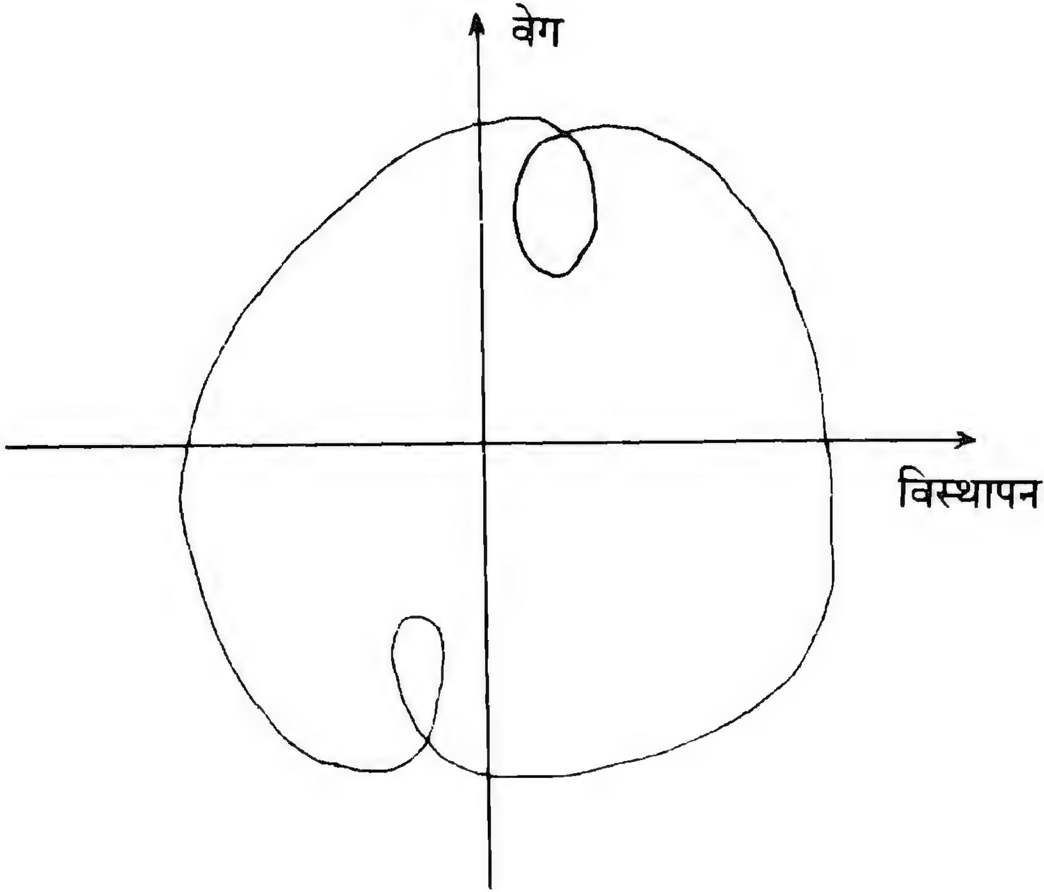
रेषीय चालित लंबकाची प्रावस्था अवकाशातील (फेझस्पेस) मार्गरेषा प्रारंभीच्या तात्पुरत्या हेलकाव्यांनंतर बंद वलयावर येऊन स्थिरावते. ही आकृती लंबकाची एकसारखी आंदोलनीय गती दर्शविते. ही अंतिम मार्गरेषा अवमंदित, मुक्त लंबकाच्या प्रावस्था अवकाशातील मार्गरेषेसारखीच असते, मात्र येथे वलय पूर्ण करण्याचा काल त्या बाह्य शक्तीचा आवर्तनकाल असतो, त्या *लंबकाचा नैसर्गिक आंदोलनकाल नसतो.* (आकृती 3.6)



आकृती 3.6 : बाह्य आवर्ती शक्तीद्वारे चालित रेषीय अवमंदित लंबकाची प्रावस्था अवकाशातील मार्गरेषा. अंतिम स्थिर स्थिती ठळक रेषेने दाखविली आहे.

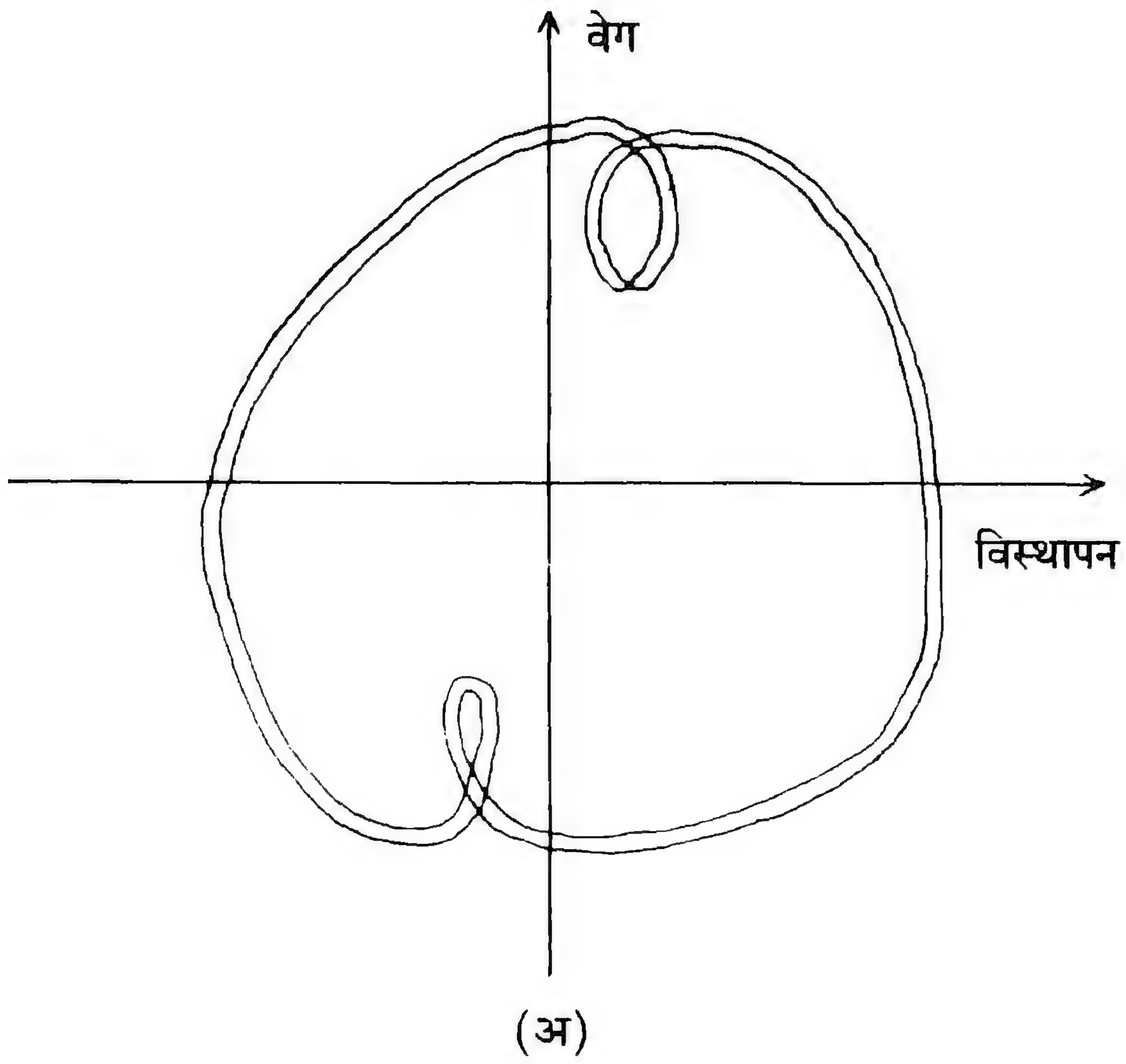
जसजशी लंबकाची आंदोलने अधिकाधिक जोराने चालविल्याने अधिकाधिक विस्तारत जातात, तसतशी प्रावस्था पातळीवर (फेझ प्लेन) अरेषीयत्वाची भुते अवतरू

लागतात. आपण आधी बघितल्याप्रमाणे मोठा आंदोलनविस्तार असतो तेव्हा लंबकाला मागे खेचणारे पुन:स्थापी बल अरेषीय प्रमाणात बदलते. सोपेपणा, साधेपणा व नियमितता यांचा आदर्श नमुना मानली गेलेली लंबकाची हालचाल आता अत्यंत क्लिष्ट, व्यामिश्र बनते. चालित अरेषीय लंबकाचा आंदोलनकाल हा चालित रेषीय लंबकाप्रमाणे स्थिर नसतो. उलट सर्व प्रकारच्या आवर्ती तसेच अनियमित हालचाली नजरेस येऊ लागतात. या हालचाली लंबकाला चालविणाऱ्या व अवमंदित करणाऱ्या बलांवर बऱ्याच जटिल प्रकारे अवलंबून असतात. प्रत्यक्षात जे घडते ते वर्णन करणे फारच कठीण आहे. म्हणून एका सोप्या उदाहरणाचा उपयोग करू. एक अरेषीय चालित लंबक कल्पूया की, ज्यात पुन:स्थापी बल हे लंबकाच्या विस्थापनेच्या तृतीय घाताच्या प्रमाणात असेल.

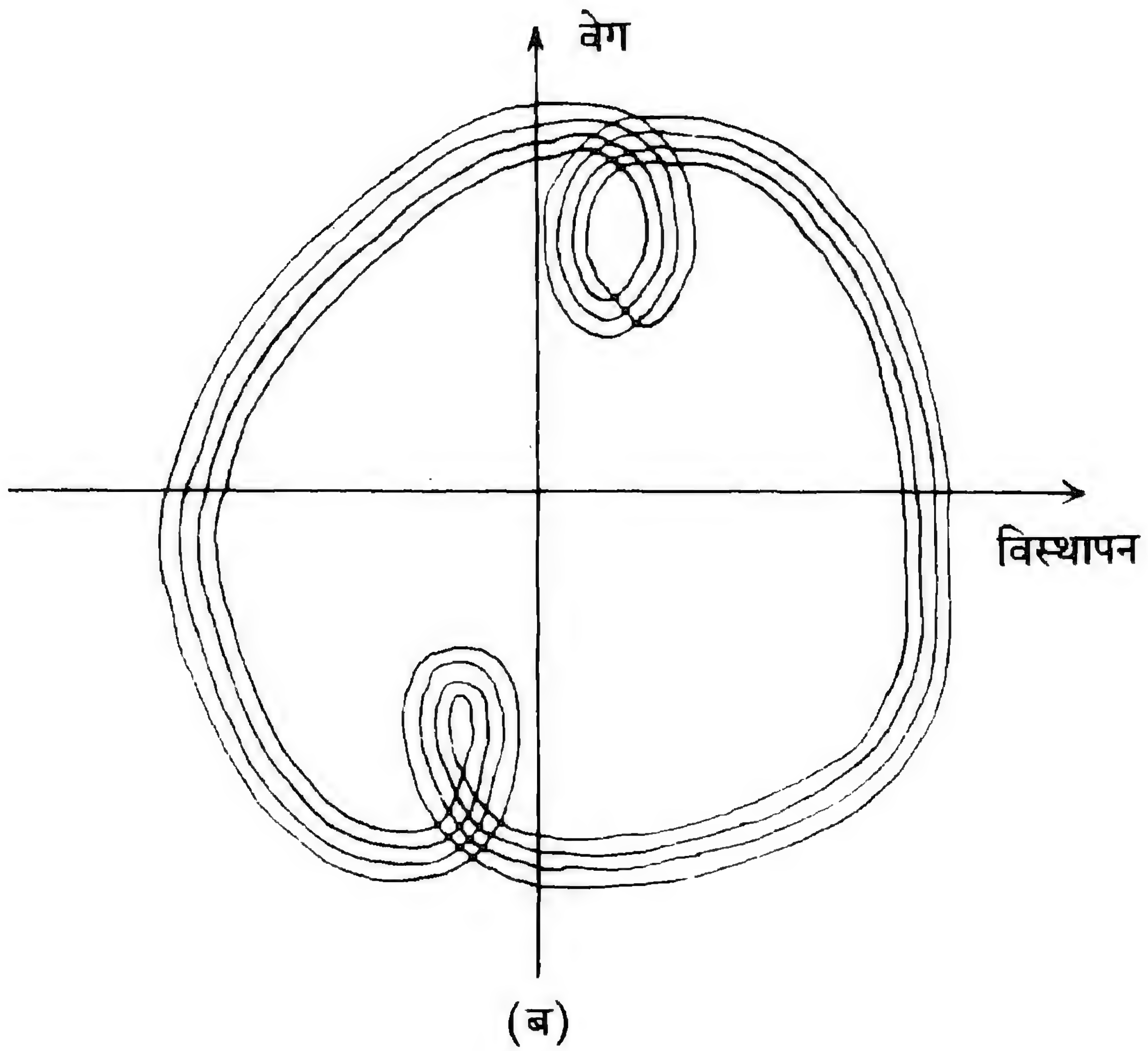


आकृती 3.7 : एका विशिष्ट अरेषीय चालित लंबकाची प्रावस्था अवकाशातील मार्गरेषा (वानगीदाखल फक्त). प्रारंभीची अल्पजीवी अस्थिर हालचाल दाखविलेली नाही.

अवमंदन मोठ्या प्रमाणावर असते तेव्हा अरेषीय लंबकाची हालचाल रेषीय लंबकाच्या हालचालीपेक्षा फार वेगळी नसते. आंदोलनकाळ निश्चित, ठरीव असतो आणि प्रावस्था अवकाशातील मार्गरेषा थोडीच वेगळी व किंचितच क्लिष्ट असते. (आकृती 3.7) जसजसे अवमंदन कमी कमी केले जाते, तसतसे अरेषीय पुन:स्थापी बलाचे तुलनात्मक महत्त्व वाढत जाते, आणि पुरवठा समीकरणाबाबत जे होताना आपण पाहिले तशाच प्रकारच्या घटना घडण्यास सुरुवात होते. अवमंदनाच्या एका विशिष्ट किंमतीस लंबकाच्या हालचालीत अचानक बदल घडून येतो, आणि त्याची प्रावस्था अवकाशातील मार्गरेषा एकाएकी दुहेरी वलयाकृती बनते, लंबकाचा आंदोलनकाल दुप्पट होतो. अवमंदन आणखी कमी करत गेल्यास दुसऱ्या एका विशिष्ट किंमतीस लंबकाची हालचाल एकदम 'चौपट आंदोलनकाल'



(अ)



(ब)

आकृती 3.8 : अरेषीयत्वातील तुलनात्मक वाढीमुळे लंबकाच्या हालचालीत घडणारी आंदोलनकाल दुप्पटी.

वाली होते. अवमंदन कमी कमी होताना अरेषीय बलाची तुलनात्मक परिणामकारकता वाढत जाऊन आंदोलनकाल दुप्पट होत जातो व पुढे आठपट, सोळापट अशा किमतीही आढळून येतात. एका विशिष्ट मर्यादेपलीकडे लंबकाची हालचाल पूर्णपणे अनावर्त स्वरूपाची होते. या ठिकाणी कोलाहलाचा आरंभ होतो. (आकृती 3.8)

हे सर्व अविश्वसनीय वाटते. परंतु हे काही केवळ सैद्धान्तिक पातळीवरचे सत्य नाही. विशिष्ट अवमंदन व चालनबल वापरून तयार केलेल्या लंबकांची प्रतिमाने प्रत्यक्षात अशा प्रकारच्या हालचाली दाखवितात. यातील आवश्यक अट आहे अरेषीयत्वाची. रेषीय लंबक कधीच कोलाहल स्थितीत जाणार नाही. आणि कोलाहलाबरोबर येतो लॉरेन्झने शोधून काढलेला भाकीतक्षमतेचा अभाव. या कोलाहल अवस्थेत लंबकाच्या हालचालींचे भाकीत आपणास कधीच करता येणार नाही. दोन सारखे अरेषीय चालित लंबक जवळजवळ सारख्याच प्रारंभस्थितीत आंदोलित केले तरी त्यांची पुढील मार्गक्रमणा व हालचाल परस्परांपासून पूर्ण भिन्न झाल्याचे दिसून येईल.

विश्वाची हालचाल घड्याळातील यंत्राप्रमाणे काटेकोरपणे चालते असे न्यूटनीय रूपावली (पॅराडाइम)नुसार मानले जाते. या घड्याळाच्या नियमित टिकटिकीबरोबर विश्वाचे व्यापार न्यूटनच्या निश्चिततावादी नियमांनुसार उलगडत जातात असे त्या चित्रात अभिप्रेत होते. आता आपणास हे समजले आहे की, ते घड्याळच मुळी आवर्ती नसावे. अरेषीय घड्याळ कसेही वेडेवाकडे वागू लागेल. त्याचे ठोके अनियमितपणे कसेही पडू शकतील. लाप्लास जनक उर्मट निश्चिततावादाचे मानचिन्ह असणाऱ्या लंबकाने आपल्या जनकाचा विश्वासघात केला आहे. गॅलिलिओच्या वेळेपासून गेली चारशे वर्षे जे तत्त्वज्ञान त्या लंबकाने दिमाखाने झुलत ठेवले, त्या तत्त्वज्ञानापुढे आता प्रश्नचिन्ह उभे राहिले आहे.

चर्चमधील झुंबरांमध्ये आता कोलाहल उसळला आहे.

संदर्भ 7 मध्ये तृतीय घाती पुन:स्थापी बल असलेल्या अरेषीय लंबकाचे वर्णन आहे. चालित लंबकामधील कोलाहलाची तपशीलवार चर्चा संदर्भ 17 मध्ये आहे.

चार

साक्षात्काराचा क्षण

एखादी विशिष्ट घटना वा गोष्ट घेऊन तिचे गुणधर्म वा लक्षणे शोधण्याचे व त्यांचे स्पष्टीकरण करण्याचे काम जेव्हा वैज्ञानिकाच्या हातून घडते तेव्हा ती (तो) चांगल्या प्रकारचे वैज्ञानिक संशोधन करत असते (असतो). विज्ञान म्हणजे काही तत्त्वज्ञान नव्हे. वैज्ञानिक संदिग्ध, सर्वसाधारण स्वरूपाचे काम टाळतात. विशिष्ट, निश्चित, असंदिग्ध अशा स्वरूपाच्या प्रश्नांवर काम करण्यात त्यांना अधिक समाधान प्राप्त होते, मग तो प्रश्न कितीही सामान्य स्वरूपाचा का असेना. बहुतांशी विज्ञानसंशोधन विशिष्ट संहतींच्या विशिष्ट लक्षणांचा शोध घेणारेच असते. एडवर्ड लॉरेन्झ हवामानाच्या प्रश्नाची काळजी करीत होता, रॉबर्ट मे कीटकांच्या संख्येतील बदलांचा विचार करीत होता, तर पूर्वीच्या काळी गॅलिलिओ गॅलिलेईने गुरूच्या चंद्रांची निरीक्षणे करण्यात स्वत:ला गुंतवले होते.

परंतु वैश्विक सत्यांना भिडण्याची एक आंतरिक ऊर्मी विज्ञानात असते, नैसर्गिक घटनांच्या विविधतेमागील एकतेचा शोध घेण्याचा हा प्रयत्न असतो. अगदी गुणात्मक व वर्णनात्मक स्वरूपाचा एखादा वैश्विक नियमही निसर्गाच्या व्यवहारावर महत्त्वाचा प्रकाश टाकतो. आणि ज्या वेळी हा वैश्विक नियम संख्यात्मक व तपशीलवार असतो, ज्या वेळी एकच गणिती समीकरण विभिन्न संहतींना लागू पडते, ज्या वेळी एकमेकांपासून खूपच भिन्न असलेल्या क्षेत्रांतही एकच अचल संख्या आढळून येते तेव्हा तर विज्ञानक्षेत्रात साक्षात्काराचा क्षण उदयाला येतो.

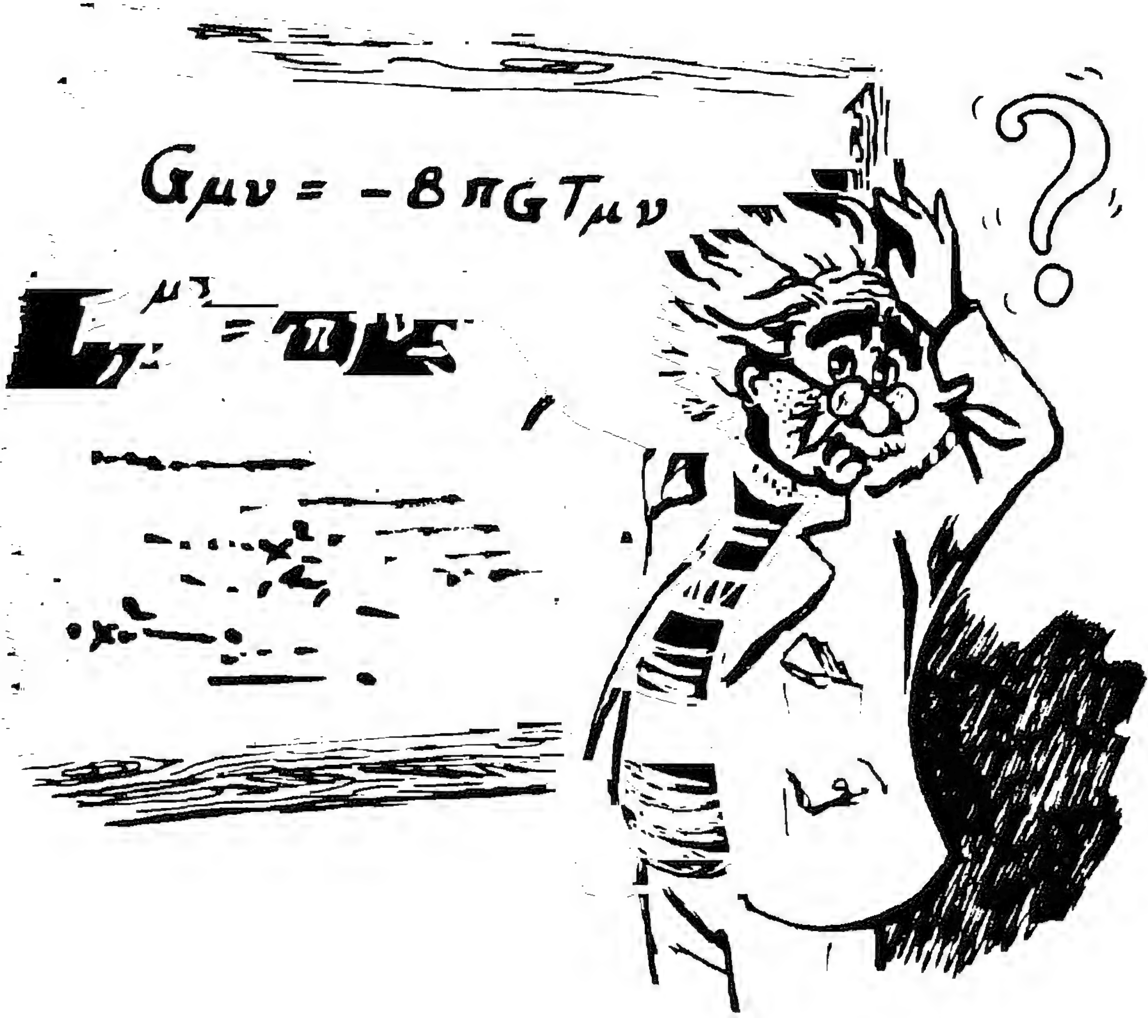
न्यूटनीय विज्ञान, तसेच या शतकातील पुंजविज्ञान यांना जी प्रतिष्ठा आहे ती प्रामुख्याने त्यांच्या वैश्विकतेवर आधारित आहे. समजा न्यूटनने शोधलेला गुरुत्वाकर्षणाचा नियम वेगवेगळ्या पदार्थांसाठी वेगवेगळे स्वरूप धारण करत असता तर काय झाले असते? घर्षणाचे नियम शोधून काढणारे जे एक वा अनेक वैज्ञानिक असतील त्यांच्याइतकेच न्यूटनचे नावही जगाला अपरिचित राहिले असते. घर्षणाचे नियम तसे खूप उपयोगाचे आहेत व ते शोधून काढणे हे चांगल्या दर्जाच्या संशोधनात बसते. परंतु वैश्विकतेमुळे येणारे सौंदर्य व सामर्थ्य काही त्यांना प्राप्त होत नाही. घर्षणाचे नियम विशिष्ट, मर्यादित परिस्थितीतच लागू पडतात. याउलट गुरुत्वाकर्षणाचा नियम वैश्विक आहे. सफरचंदाचे जमिनीवर पडणे, ग्रहांचे

सूर्याभोवती भ्रमण, नैसर्गिक तसेच मानवनिर्मित उपग्रहांचे ग्रहांभोवती फिरणे, आणि अशाच प्रकारच्या नानाविध गोष्टींचे स्पष्टीकरण एकाच गणिती समीकरणाद्वारे करता येते. आइन्स्टाइन यांनी एकदा काढलेले उद्‌गार वेगळ्या शब्दात मांडून असे म्हणता येईल की अशाप्रकारचा शोध 'तो (विश्वनिर्माता) कसा विचार करतो' हे दाखवतो: बाकी अन्य शोध म्हणजे तपशिलाचा भाग झाला.

सध्या ज्ञात असलेले भौतिकीतील मूलभूत नियम हे वैश्विक स्वरूपाचे आहेत. खरे म्हणजे ते तसे नसते तर आपण त्यांना मूलभूत म्हटलेच नसते. एक गोष्ट खरी आहे की या नियमांवरही काही मर्यादा असतात आणि काही क्षेत्रांत ते चुकीचेही ठरतात. परंतु हे नियम लागू पडणारे क्षेत्र खूपच व्यापक असते आणि अनेकविध प्रकारच्या घटना व घडामोडी त्यात सामावलेल्या असतात. प्रकाशाच्या वेगापेक्षा बऱ्याच कमी गतीने जाणाऱ्या सर्व स्थूलवस्तूंना न्यूटनचे गतिनियम लागू पडतात. आइन्स्टाइन यांच्या मर्यादित (वा विशिष्ट) सापेक्षता सिद्धान्तात वेगांची मर्यादाही दूर होते, आणि एकसारख्या गतीने जाणाऱ्या सर्व निरीक्षकांना हा सिद्धान्त लागू पडतो. व्यापक (वा सामान्य) सापेक्षतासिद्धान्त तर अधिक मोठ्या क्षेत्रावर आपले साम्राज्य पसरतो - कशाही प्रकारे हालचाल करणाऱ्या निरीक्षकांना हा लागू पडतो. श्रॉडिंगर यांचे पुंजसिद्धान्तातील समीकरण सर्व अणू-रेणूंना लागू पडते. प्रथमदर्शनी वेगळ्या वाटणाऱ्या गोष्टी एखाद्या चांगल्या सिद्धान्तामुळे एकत्र बांधल्या जातात. न्यूटनने भूतलावरील व अंतराळातील हालचाली एकत्र आणल्या. मॅक्सवेलने विद्युत, चुंबकशास्त्र व प्रकाश यांना एका धाग्यात गुंफले, तर आइन्स्टाइनने स्थळ, काळ व वस्तुमात्र एकत्र आणले.

या शतकातील भौतिकीच्या प्रगतीमागील सर्वांत महत्त्वाची प्रेरणा एकात्मीकरणाची आहे. निरनिराळ्या वस्तूंतील सर्व परस्परक्रिया सूक्ष्मपातळीवर चार मूलभूत बलांद्वारे विशद करता येतात हे सुमारे तीस वर्षांपूर्वीच सिद्ध झाले होते. ही चार बले म्हणजे गुरुत्वाकर्षण बल, विद्युतभारित वस्तूंमधील विद्युतचुंबकीय बल, अणुगर्भात प्रोटॉन व न्यूट्रॉन यांना एकत्रित बांधून ठेवणारे 'प्रभावी (वा उग्र) बल', आणि चौथे किरणोत्सारास कारणीभूत असणारे 'क्षीण (वा सौम्य) बल'. सध्या स्टीव्हन वाइनबर्ग व अब्दुस सलाम यांनी केलेल्या उत्कृष्ट संशोधनामुळे विद्युतचुंबकीय व क्षीण ही दोन्ही बले एकाच एकात्म बलाची दोन भिन्न रूपे आहेत हे सिद्ध झाले आहे. या बलास 'विद्युतक्षीण बल' म्हटले जाते. विद्युतचुंबकीय व गुरुत्वाकर्षण या दोन बलांचे एकात्मीकरण करण्याच्या प्रयत्नात आइन्स्टाइन यांनी आपल्या आयुष्याची अखेरची चाळीस वर्षे खर्च केली. त्यांना अपयश पत्करावे लागले व भरीस समकालीन दिग्गज वोल्फगांग पाऊली यांचा टोमणाही झेलावा लागला - 'देवाने जे अलग केले आहे ते एकत्र आणणे कोणाही माणसास शक्य नाही!'

परंतु या अपयशाने निराश न होता भौतिकी वैज्ञानिक एकात्मीकरणाच्या ध्येयाचा पाठपुरावा चिकाटीने करतच आहेत. प्रभावी बल व विद्युतक्षीण बल यांच्या एकीकरणाचे प्रयत्न करणारे 'भव्य एकात्म सिद्धान्त' मांडले जात आहेतच. शिवाय या तीन बलांबरोबर चकवा देणारे गुरुत्वाकर्षण सामील करण्यासाठी असे अप्रतिम वैचारिक कौशल्याने भरलेले



आकृती 4.1 : आइन्स्टाइन यांनी विद्युतचुंबकीय व गुरुत्वाकर्षण बलांचे एकात्मीकरण करण्याचा प्रयत्न केला, पण ते अपयशी ठरले.

सिद्धान्त पुढे केले जात आहेत की कोणीही थक्क होऊन जावे. एकात्मतेचे अंतिम शिखर गाठण्यापूर्वी अनेक डोंगर-दऱ्या पार करणे अजून बाकी आहे. परंतु ते स्वप्न अजून तरी भंगलेले नाही.

मूलभूत नियम वैश्विक असणे याचा अर्थ एकसारख्या प्रकारची वागणूक वा हालचाली होणे असा होत नाही. यापूर्वी केलेल्या (पाहा: प्रकरण 1) स्पष्टीकरणाप्रमाणे संहतीची हालचाल नियम आणि प्रारंभस्थिती या दोहोंमुळे निश्चित होते. ('प्रारंभस्थिती'ऐवजी 'सीमास्थिती' वा संहतीवर लादलेल्या 'निर्बंधांची स्थिती' हे शब्दप्रयोग अधिक पसंत केले जातात.) यामुळे त्याच ठरावीक नियमांतून संहतींच्या अनेकविध, नाना प्रकारच्या हालचालींचा उगम होतो; निसर्गात आढळणारे थक्क करणारे वैविध्य जन्माला येते. संहतीची प्रारंभस्थिती एकतर स्वैररीत्या तयार होते वा ठरवून निर्माण केली जाते. अंतराळातील एखाद्या प्रचंड वस्तुमानाच्या वायुरूपी गोळ्याच्या घनतेत सहज स्वैरपणे वाढ झाली तर त्याच्या आकारमानानुसार एक तर त्याचे रूपांतर अणुइंधन जाळत तळपणाऱ्या ताऱ्यात होईल वा एखाद्या थंड गारठलेल्या ग्रहात होईल. या दोन्ही बाबतीत कार्यरत असणारे भौतिकीचे वैश्विक नियम सारखेच असतात.

याच प्रकारे हवी तशी प्रारंभस्थिती निर्माण करून अणुविज्ञानाच्या नियमांनुसार आपण अणुभट्टी उभारू शकतो वा अणुबॉम्ब बनवू शकतो. नियम तेच असतात, हालचाली व वर्तन वेगवेगळे होते. नियम सोपे व वैश्विक असतात. वर्तन व्यामिश्र व विशिष्ट प्रकारचे

असते. एखादी संहती जितकी अधिक व्यामिश्र तितकी ती अधिक विशिष्ट प्रकारची व एकमेव असते, आणि तिचे वर्तनही अधिक अलग, वैयक्तिक स्वरूपाचे होत जाते. माणूस म्हणजे व्यामिश्रतेची परमावधी. त्यामुळे दोन माणसांचे वागणे कधीच एकसारखे नसते. व्यामिश्रता व वर्तणुकीतील वैश्विक, सार्वत्रिक समानता एकत्र नांदत नाहीत.

निदान कोलाहल विज्ञानाचा उदय होईपर्यंत तरी असे मानले जात होते. परंतु आता आपल्याला कळून चुकले आहे की बऱ्याच संहतींमध्ये वरवर स्वैर भासणारी अनियमित वर्तणूक वैश्विकतेच्या पायावर आधारित असते. अरेषीयता वाढत जाते तशी एखाद्या परिसरातील कीटकसंख्या आंदोलनकाल दुपटीच्या मार्गाने कोलाहल स्थितीत जाते. अरेषीयता वाढते तशी चालित लंबकाची हालचालही अशाच मार्गाने कोलाहल स्थितीत जाते. का? त्यांच्यात कोणता संबंध आहे? एकमेकींशी कसलाच संबंध नसलेल्या दोन संहतींनी इतकी अविश्वसनीय व्यामिश्र आणि *तरीही समसमान* वर्तणूक का दाखवावी? कोणी असे म्हणेल की त्या संहती वेगवेगळ्या असल्या तरी त्यांची उत्क्रांती घडविणारे पायाभूत नियम एकच आहेत. परंतु ते खरे नाही. कीटकसंख्येचे पुरवठा समीकरण गणितीय दृष्टीतून अरेषीय चालित लंबकाच्या समीकरणापेक्षा वेगळेच आहे. तर्काला न जुमानणारी वैश्विकता येथे आपल्याला आढळून येते. अरेषीयत्वाचा यक्ष खूप विभिन्न स्वरूपाच्या संहतींना एका समान पद्धतीने वागण्यास भाग पाडतो असे दिसते. आणि हे काही या दोन उदाहरणांपुरतेच खरे नाही. द्विभाजन व आंदोलनकाल दुप्पटीकरण या मार्गाने कोलाहला प्रत जाणाऱ्या असंख्य संहती आहेत हे आपल्याला आता कळून चुकले आहे.

परंतु कोलाहलातील वैश्विकतेच्या मुख्य कथानकाची ही फक्त नांदी आहे. थक्क करून सोडणारे हे कथानक उलगडण्यास सुरुवात झाली 1975 साली अमेरिकेतील लॉस ॲलॅमॉस प्रयोगशाळेत. पहिल्या अणुबॉम्बचे निर्मितिस्थळ म्हणून जगाला ही प्रयोगशाळा परिचित आहे. तर आश्चर्याची गोष्ट म्हणजे या भीतिदायक जागी एका सुंदर अंकाचा शोध लागला; एक नवीन वैश्विक स्थिरांक उघडकीस आला. याला आता 'फायगनबाउम अंक' म्हटले जाते. सध्या π (वर्तुळाच्या परीघाचे त्याच्या व्यासाशी असणारे गुणोत्तर) आणि e (नैसर्गिक लॉगरिद्मचा आधारांक) अशासारख्या गणितातील महत्त्वाच्या वैश्विक अंकांसमवेत *फायगनबाउम* अंकाचे स्थान आहे.

मिचेल फायगनबाउम हे तेव्हाचे लॉस ॲलॅमॉस येथील तरुण व विसरभोळे भौतिकी वैज्ञानिक. ते पुरवठा समीकरणासंबंधी संशोधन करत होते. रॉबर्ट मे यांनी आधी पाहिलेले द्विभाजनाचे व आंदोलनकाल दुप्पट होण्याचे प्रकार फायगनबाउमनीही बघितले. परंतु त्यांच्या तीक्ष्ण नजरेने त्यापेक्षाही अधिक काही टिपले. लागोपाठची द्विभाजने अधिकाधिक लवकर येत असतात हे त्यांच्या लक्षात आले. अरेषीय प्राचल λ च्या सुरुवातीच्या द्विभाजनांशी संबंधित किमती होत्या 3.000, 3.450, 3.544, 3.564 आणि 3.569. या अंकांत दडलेल्या नियमितपणाने फायगनबाउम यांची जिज्ञासा चाळवली गेली. त्या अंकांत एक भूमितीय अनुक्रम दडलेला होता. तो पाहण्यासाठी लागोपाठच्या द्विभाजनांच्या λ च्या किंमतींतील फरक लक्षात घ्या. हे फरक येतात - 0.450, 0.094, 0.020 आणि 0.004. हे

फरकांचे अंक एक उतरता, कमी होत जाणारा भूमितीय अनुक्रम दर्शवितात - लागोपाठच्या दोन फरकांतील साधारण गुणोत्तर 5च्या जवळपास येते. पुढील आणखी द्विभाजने तपासल्यावर फायगनबाउम यांच्या लक्षात आले की साधारण गुणोत्तराची किंमत 4.669 या अंकाजवळ येते आहे. भाकीतक्षमतेचा अभाव असलेल्या कोलाहलाच्या प्रांतात जाणाऱ्या या मार्गावर द्विभाजनाचे फाटे काही अनिश्चितपणे फुटत नव्हते. द्विभाजनाच्या अनुक्रमातील नियमितपणा इतका अचूक होता की पुढच्या द्विभाजनाची λ ची किंमत फायगनबाउम स्वत: हाताने काढत असत आणि त्यानंतर काही वेळाने त्यांचा धीमा संगणक पुरवठा समीकरण प्रत्यक्ष सोडवून ती किंमत बरोबर असल्याचे निश्चित करी. साहजिकच मिचेल थरारून गेले.

परंतु या कथेचा कळस अजून यायचाच होता. महत्त्वाच्या शोधांच्या वेळी बऱ्याचदा आढळून येणाऱ्या विलक्षण अंत:प्रेरणेला अनुसरून फायगनबाउमनी *वेगळे* अरेषीय प्रतिमान घेऊन काम करायचे ठरविले. या वेळी पुरवठा समीकरणाच्या द्विघाती फलाऐवजी त्यांनी एक त्रिकोणमितीय फल निवडले. प्रत्येक शाळकरी विद्यार्थ्यालाही ठाऊक असते की ही दोन फले अगदीच भिन्न स्वरूपाची आहेत. द्विघाती फलाचा आलेख अन्वस्त म्हणजे पॅराबोला आकाराचा असतो, तर ज्यावक्रीय (साइनवक्रीय) त्रिकोणमितीय फलाचा आलेख आवर्ती लहरीसारखा असतो. मात्र ही दोन्ही फले अरेषीय आहेत. द्विभाजने व आंदोलनकाल दुप्पटीकरण या गुणात्मकदृष्ट्या सारख्या असलेल्या मार्गानेच दोन्ही फले कोलाहलाच्या प्रांताकडे जातात हे लक्षात येता त्यांना आश्चर्यच वाटले होते. पुन्हा एकदा त्यांनी बघितले की द्विभाजने अधिकाधिक लवकर होत जाताहेत. पुन्हा एकदा त्यांच्या लक्षात आले की लागोपाठच्या द्विभाजनांच्या प्राचल किमतीतील फरक भूमितीय अनुक्रम दाखवतोय. परंतु तरीही शेवटचा धक्का स्वीकारण्याची त्यांची तयारी झालेली नव्हती. नव्या फलाबाबत जे भूमितीय गुणोत्तर त्यांनी मोजले ते आधी पुरवठा समीकरणात त्यांनी मोजलेल्या गुणोत्तराशी तंतोतंत जुळणारे होते : 4.669. उद्दीपित होऊन त्यांनी आंदोलनकालदुप्पटीच्या मार्गाने कोलाहलाकडे जाणारी वेगवेगळी अरेषीय प्रतिमाने घेऊन बघितली. त्या सर्वांनी तीच भूमितीय नियमितता दाखवली व त्या आकडेमोडींतून प्रत्येक वेळी तोच अंक - 4.669 - बाहेर येत गेला. ही समानता अदमासे आहे का हे बघण्याचा त्यांनी प्रयत्न केला, पण नाही. ते आकडेमोड अधिकाधिक अचूकपणे करत गेले, परंतु द्विभाजन फरकांतील गुणोत्तर त्या सर्व वेगवेगळ्या फलांबाबत एकसारखेच येत राहिले - अगदी कितीही दशांश बिंदूपर्यंत ठरवले तरी. दशांशाच्या सहाव्या बिंदूपर्यंत हा वैश्विक अंक येतो 4.669202. फायगनबाउमना कळून चुकले की तो त्यांच्या साक्षात्काराचा क्षण होता.

मूलभूत नियमांच्या वैश्विकतेची वैज्ञानिकांना दीर्घ काळ सवय झालेली आहे. परंतु अशी वैश्विकता - संख्यात्मक व तपशीलवार, तीही एकमेकांपेक्षा खूप भिन्न असणाऱ्या व्यामिश्र संहतींमधील - हा प्रकार कोणाच्या कल्पनेतही आला नव्हता. फायगनबाउमनी शोधलेल्या वैश्विकतेने कोलाहलाला विज्ञानक्षेत्राच्या आघाडीवर स्थान प्राप्त करून दिले. महान गणितीय व वैज्ञानिक शोधांसाठी विश्लेषणात्मक पद्धतीची गरज असते, एखाद्या 'मुक्या', यांत्रिक, 'अप्रज्ञावान' संगणकाद्वारे काही निसर्गातील खोल दडलेली गुपिते

उघडकीस आणणे शक्य होणार नाही, ही कल्पना त्यामुळे खोटी ठरली. फायगनबाउम यांच्या या सुरुवातीच्या कामगिरीनंतर गंगेतून बरेच पाणी वाहून गेले आहे. आता आपल्याला कळले आहे की आंदोलनदुप्पटीचा मार्ग हा काही एकमेव मार्ग नव्हे. परंतु निसर्गातील अनेक अरेषीय संहती या मार्गानेच जातात आणि तेथे फायगनबाउम अंक क्रांतिकारक संदेश पसरवत असतो की अचूक व संख्यात्मक वैश्विकता निसर्गातील क्लिष्ट व व्यामिश्र घडामोडींनाही लागू पडू शकते.

फायगनबाउम यांच्या शोधाची कथा संदर्भ 4 मध्ये आहे.

पाच

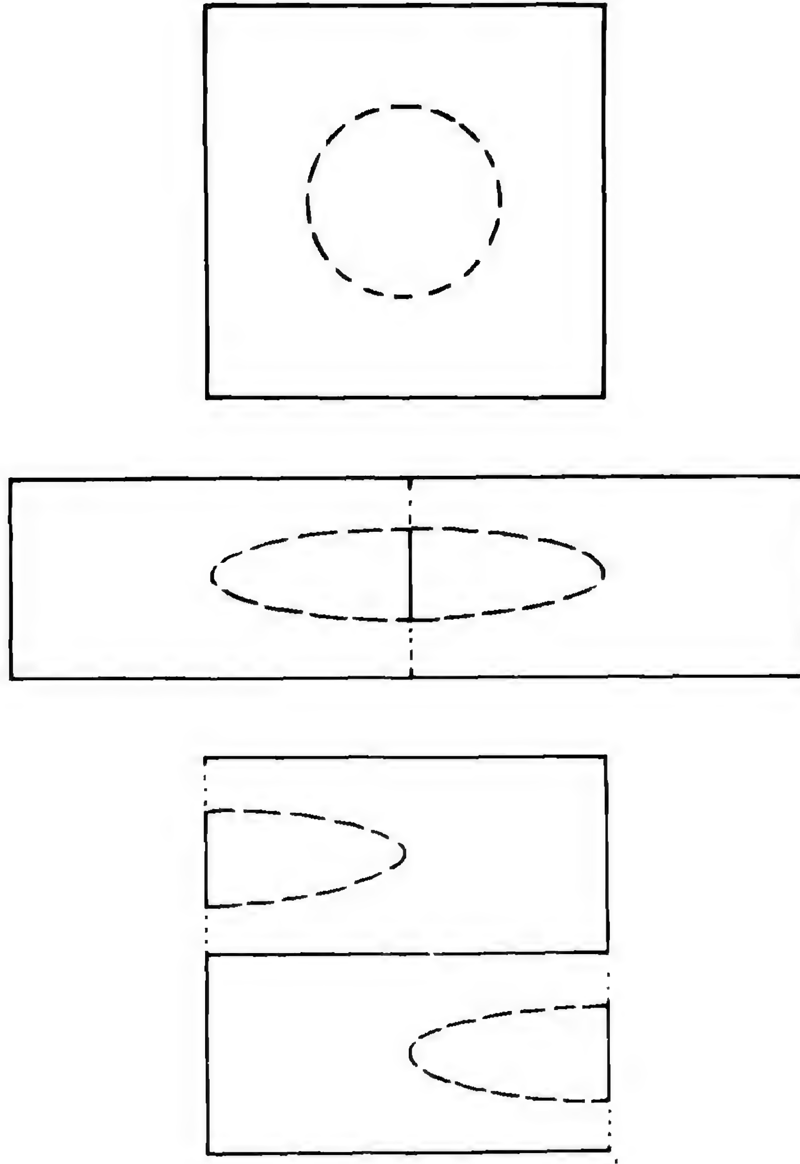
पाककलेतील क्षेत्रविद्या

पाककलेतील एक हेवा वाटण्याजोगे कसब आपल्या देशातील अनेकांजवळ असते ते म्हणजे चपात्या करण्याची कला. चपाती लाटण्याच्या प्रक्रियेत जी क्षेत्रविद्यीय (topological) रूपांतरे अतिशय कौशल्याने केली जातात त्यांचे भान चपाती खाण्याच्या नादात आपल्याला राहत नाही हे वेगळे. या कलेची सर्वोच्च पातळी गाठली जाते ती मल्याळी रोटी बनविताना. तेथे ताणणे, पिळणे, घड्या घालणे अशी रूपांतरे पीठ मळताना अनंत वेळा केली जाऊन एकसारख्या पोताचा कणकेचा गोळा तयार केला जातो.

या प्रकारची (परंतु या समान नव्हे) प्रक्रिया 'बेकरचे (भटाऱ्याचे) रूपांतर' म्हणून ओळखल्या जाणाऱ्या कृतीतही होत असते (आकृती 5.1 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे). मळलेल्या पिठाचा चौरस तुकडा लाटून आयताकृती केला जातो - एका बाजूची लांबी वाढते तर दुसऱ्या बाजूची कमी होते. बरोबर मध्यावर हा आयत कापून कणकेचे दोन तुकडे एकमेकांजवळ ठेवून पुन्हा एक चौरसाकृती केली जाते. हे रूपांतर अनंत वेळा करणे ही स्वयंपाकघरात कोलाहल तयार करण्याची भूमितीय पाककृती आहे!

हे समजून घेण्यासाठी अशी कल्पना करा की सुरुवातीच्या कणकेच्या चौरस तुकड्याच्या मध्यभागी मूगडाळीच्या बारीक कण्यांनी एक लहानसे वर्तुळ रेखले आहे. लाटल्यावर या वर्तुळाचे रूपांतर लंबवर्तुळात होईल. मधोमध कापून दोन तुकडे एकमेकांच्या शेजारी ठेवल्यावर काही शेजारी शेजारी असलेले डाळीचे कण एकमेकांपासून दुरावतील. हा प्रकार खूप वेळा केल्यावर शेजारी शेजारी असणाऱ्या बहुतेक कणांच्या जोड्यांवर दुरावण्याचा प्रसंग ओढवेल. भटाऱ्याच्या 'निश्चिततावादी' रूपांतरामुळे कणकेतील बहुतांश बिंदूंचे मार्ग अशा प्रकारे कोलाहलीय होतील. कणकेत जर खूप बारीक कण मिसळले तर अंतिम स्थितीत एकमेकांजवळ आढळणारे दोन कण सुरुवातीस एकमेकांपासून फारच दूर असण्याची शक्यता असते.

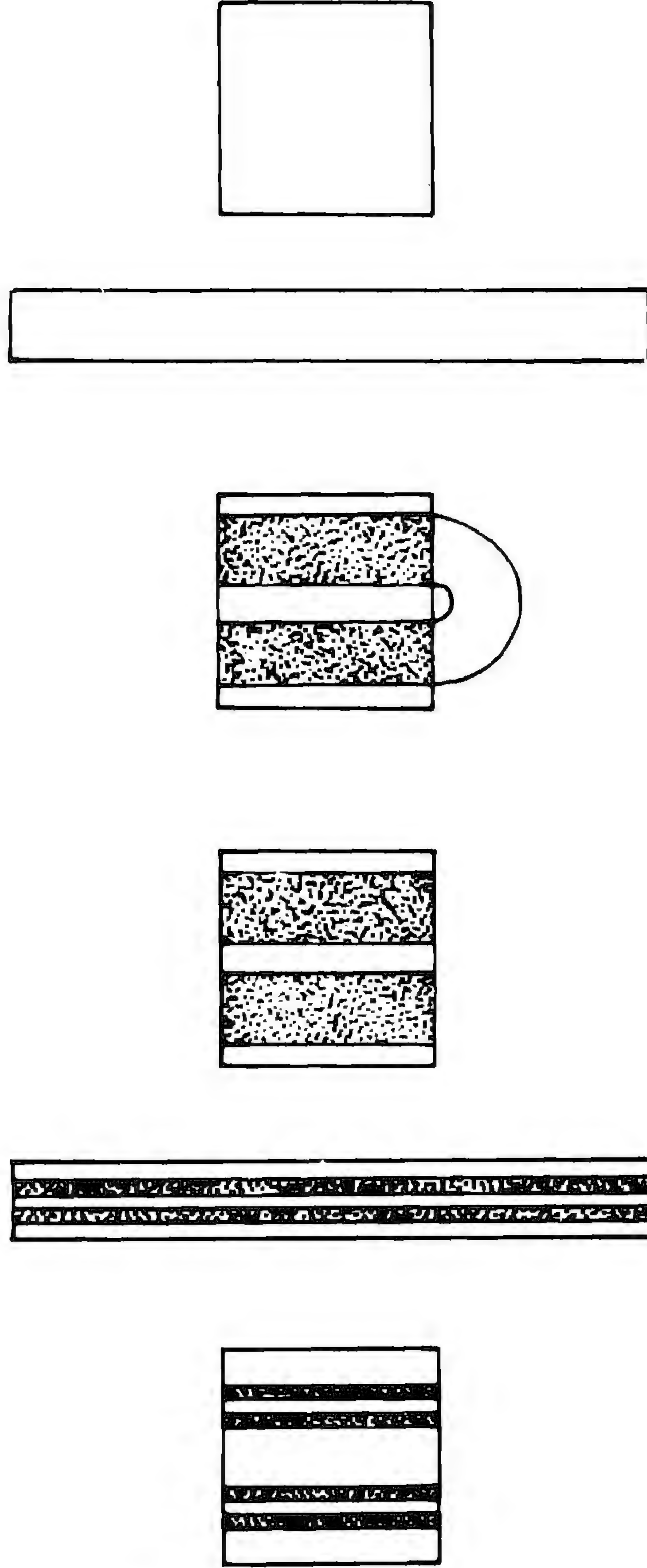
हॅमिल्टोनियन समीकरणांनी ज्या संहतींच्या हालचाली व गती निश्चित केल्या जातात त्यांना गतिशास्त्रीय संहती (dynamical systems) म्हणतात. अशा गतिशास्त्रीय संहतींच्या प्रावस्था अवकाशात जे घडते त्याचे योग्य व अचूक वर्णन या भटारी रूपांतरातून होते, हे



आकृती 5.1 : मूगडाळीच्या बारीक कण्या पेरलेल्या कणकेच्या चौरस तुकड्याचे भटाऱ्याचे रूपांतर. या रूपांतराची पुनरावृत्ती केल्यावर बहुतांशी कणांचे मार्ग कोलाहलीय होतात.

प्रथम स्टीफन स्मेल या थोर गणितज्ज्ञाच्या लक्षात आले. तसे पाहता हॅमिल्टोनियन समीकरणे ही न्यूटनने मांडलेली नेहमीची गतिशास्त्रीय समीकरणेच आहेत, मात्र ती अधिक व्यापक प्रकारची असून गणितीदृष्ट्या अधिक सुंदर स्वरूपाची आहेत. प्रत्यक्षातील संहतींमधील कोलाहलाची नक्कल करण्यासाठी स्मेल यांनी एक खेळणे बनवले. नंतर खूपच लोकप्रिय ठरलेले हे खेळणे 'नाल नकाशा' म्हणून ओळखले जाते. गणितामध्ये एका सटाचे रूपांतर दुसऱ्या सटात करण्यास 'नकाशा' म्हणतात. स्मेलचे रूपांतर भटारी रूपांतरासारखेच आहे. एक चौरस ताणून आयताकृती केला जातो. मात्र मधोमध कापून दोन तुकडे शेजारी ठेवण्याऐवजी त्या आयताची घडी घातली जाते (आकृती 5.2) अनेक वेळा याची पुनरावृत्ती झाल्यावर आपण अशा स्थितीत येतो की त्या सटातील शेजारी शेजारी आढळणारे बिंदू पूर्वी एकमेकांपासून खूप दूर असण्याची शक्यता असते.

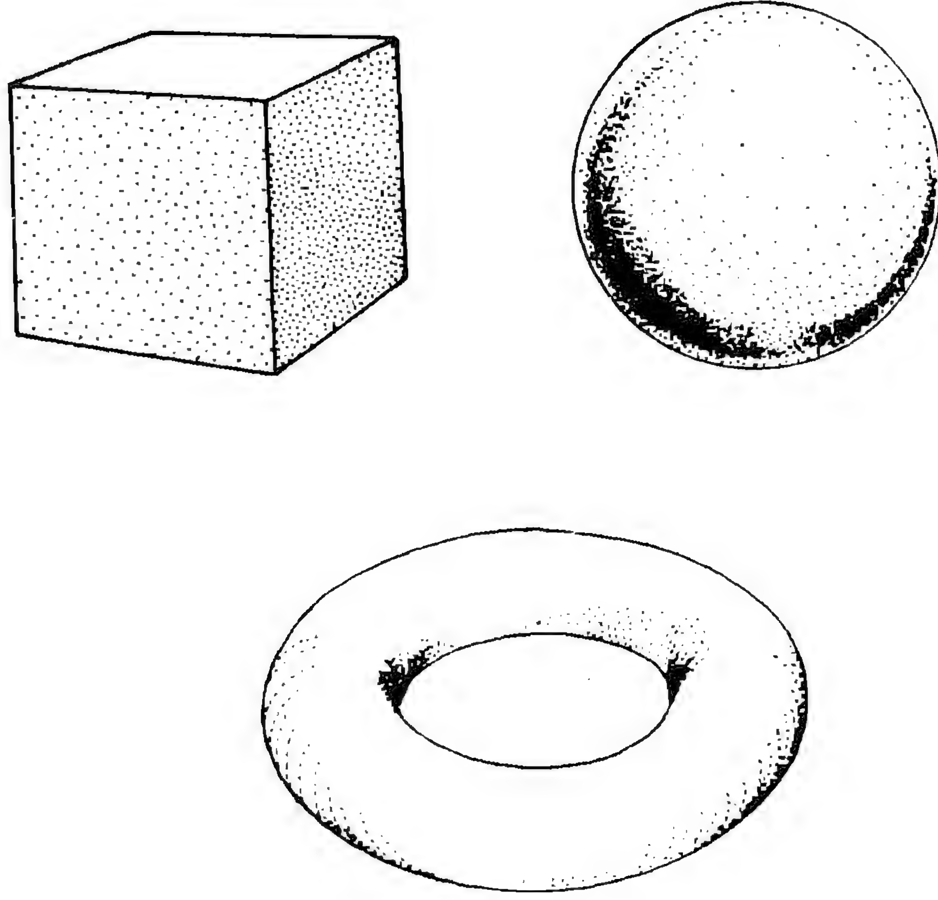
स्मेल हे क्षेत्रविद्येतील (topology) एक मान्यवर तज्ज्ञ. क्षेत्रविद्या या गणितशाखेस कधीकधी 'रबरी चादरीची भूमिती' असे संबोधले जाते. समजा तुम्ही त्या पातळ रबरी तुकड्यावर एक त्रिकोण रेखाटला व योग्य प्रकारे अवकाश (म्हणजे ते रबर) ताणले तर त्या त्रिकोणाचे रूपांतर अन्य कोणत्याही बंद वलयाकृतीमध्ये करता येते. म्हणजे एखाद्या



आकृती 5.2 : कोलाहलाची नक्कल करण्यासाठी स्टीफन स्मेल यांनी मांडलेला 'नाल नकाशा'.

वर्तुळात वा आयताकृतीत. परंतु कसेही ताणले वा दाबले तरी बंद वलयातून अंगठीचा आकार करता येत नाही. क्षेत्रविद्येत त्रिकोण, वर्तुळ व आयत या समतुल्य चिजा आहेत, परंतु (द्विमिती) अंगठीसारखा वेढा त्यांना समतुल्य नाही. त्याचप्रमाणे त्रिमितीमध्ये गोल हा घन ठोकळ्यास समतुल्य असतो, पण तो टोरस म्हणजे गोठ (किंवा डोनट वा मेदूवडा) यासारख्या घन कड्यास समतुल्य नसतो (आकृती 5.3). वस्तूंमध्ये एकाच प्रकारची 'जोडणी' वा ' जोडले-जाणे-पण' आहे की नाही, त्यांच्यात गाठी वा भोके आहेत का, वस्तूच्या वेगवेगळ्या भागांना जोडणारे रेषाखंड त्या वस्तूच्या बाहेर जाऊ शकतात का, वगैरे

प्रश्नांचा क्षेत्रविद्येत विचार केला जातो. आकार व आकृतीचे तपशील यांच्याशी क्षेत्रविद्येला कर्तव्य नसते. सटाचा वा भूमितीय वस्तूचा क्षेत्रविद्या हा अधिक मूलभूत गुणधर्म आहे, कारण जोडले-जाणेपण आणि सातत्य, अखंडता या संकल्पना दोन बिंदूंतील अंतराच्या संकल्पनेपेक्षा अधिक पायाभूत व आर्ष आहेत. आपण जेव्हा अंतराची कल्पना दाखल करून घेतो तेव्हा वस्तूंना मोजमापीय (metrical) गुणधर्म प्राप्त होतात. त्या वेळी मग

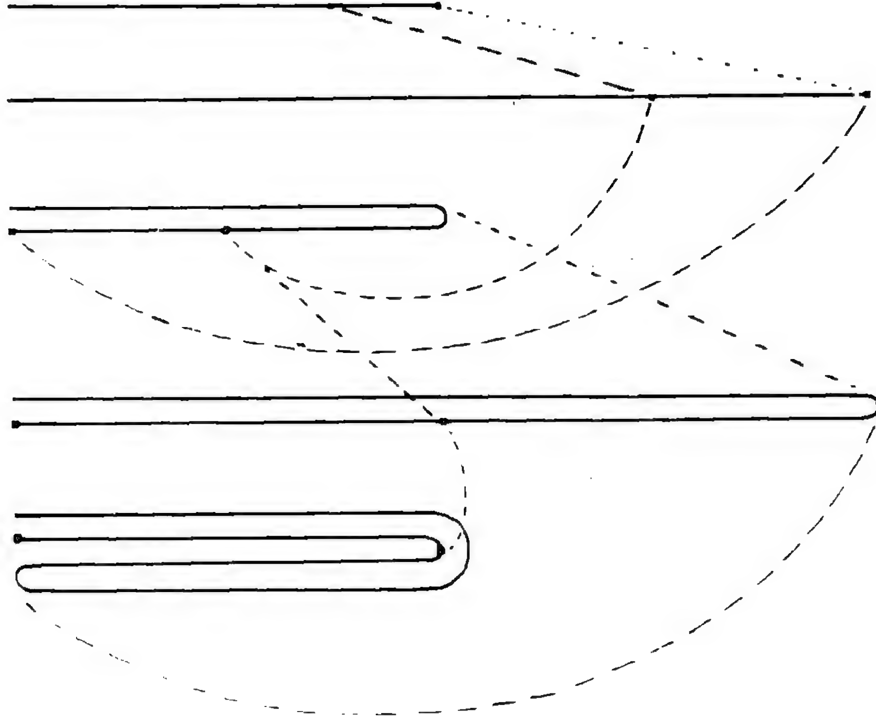


आकृती 5.3 : क्षेत्रविद्येनुसार गोल हा घनास समतुल्य आहे, परंतु टोरस नाही.

त्रिकोण हा आयत वा वर्तुळापेक्षा भिन्न ठरतो; आणि आपण नेहमीच्या सामान्य भूमितीकडे परत येतो.

गणितातील या गहन व दुर्बोध विद्याशाखेचा कोलाहलविज्ञानाशी काय संबंध येतो, हे समजून घेण्यासाठी आपण पुन्हा एकदा दुसऱ्या प्रकरणात चर्चिलेल्या पुरवठा समीकरणाकडे ($X_{n+1} = \lambda X_n (1 - X_n)$) वळू या व त्याच्याकडे भूमितीय दृष्टिकोनातून पाहू या. पुरवठा समीकरण म्हणजे मूलत: एक विशिष्ट नकाशा आहे - X या चलाच्या 0 ते 1 या अंतरातील बिंदूंचा त्याच अंतरावर रूपांतर करून मिळविलेला नकाशा. या समीकरणाची कोलाहलीय कारकीर्द साधारण 3.57 पासून 4 पर्यंत असते हे आपण बघितले आहे, आणि त्यात अधूनमधून आवर्ती गतीच्या खिडक्याही आढळतात - कोलाहलाचा अनियमितपणा बाजूस नियमितपणा दाखविणारे अरुंदसे पट्टे! येथे आपण $\lambda = 4$ ही साधीसोपी किंमत घेऊ, आणि एकांक लांबीच्या रेषेचे पुरवठा समीकरणामुळे काय होते ते पाहू : पुनरावृत्तीच्या पहिल्या फेरीत 0 ते 1/2 हा रेषाखंड 0 ते 1 या पूर्ण लांबीवर नकाशित होतो हे स्पष्टच आहे. रेषेच्या लांबीचा विस्तार 1 ठरलेला असल्याने रेषाखंड 1/2 ते 1 चा नकाशा हा आकृती 5.4 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे स्वत:ची घडी घालून घेतो हे सहज दिसून येते. या पुढच्या पुनरावृत्तीच्या

फेऱ्यात असेच ताणणे व घडी घालणे होत राहते. ताणल्यामुळे प्रारंभी शेजारी शेजारी असणारे बिंदू विलग होतात, तर घडी घातल्यामुळे ती संहती ठरावीक आखीव विस्तारात (येथे 0 ते 1) मर्यादित राहते.



आकृती 5.4 : पुरवठा समीकरणाच्या दोन पुनरावृत्ती - ताणणे व घडी घालणे पुन्हा पुन्हा होत राहते.

आता आपण बघितलेली रूपांतरे तशी साधीसोपी एकमितीय आहेत. प्रत्यक्षातील भौतिक संहती (उदाहरणार्थ हालचाल केवळ एका पातळीत मर्यादित नसलेला लंबक) बघितल्यास त्यांचे प्रावस्था अवकाश अधिक मितींचे असते - अनेकदा तिनापेक्षा कितीतरी अधिक मिती आढळून येतात. अधिक मितीय प्रावस्था अवकाशातील मार्गक्रमणेचे रेखाटन करणे रोडाच, पण कल्पना करण्याचा प्रयत्न करणेही विफल आहे. साहजिकच त्याचे क्षेत्रविद्यीय विश्लेषणही बरेच दुष्कर आहे. परंतु या कल्पनेचे सार मात्र तेच आहे. प्रावस्था अवकाशातील मार्गांच्या 'आकार' व 'आकृतिबंधावरून' त्या संहतीच्या सर्वसाधारण वर्तणुकीबद्दल अंदाज बांधता येतो.

अक्षय्य संहती - म्हणजे जिची एकूण ऊर्जा स्थिर असते अशी संहती - आपले प्रावस्था अवकाशातील 'आकारमान' जपून ठेवते. याउलट अवमंदित लंबकासारख्या ऱ्हासीय संहतींचे आकारमान कमी होते. कोलाहल अवस्थेतील हालचाली प्रारंभस्थितीवर फार संवेदनाक्षम रीतीने अवलंबून असतात, याचे प्रतिबिंब प्रावस्था अवकाशातील शेजारशेजारच्या मार्गरेषांच्या एकमेकींपासून झपाट्याने दूर जाण्यात उमटलेले दिसते. परंतु कोलाहलीय हालचाली काही असीमित नसतात. याचा अर्थ प्रावस्था अवकाशातील मार्गरेषाही त्याच्या काही मर्यादित, परिमित भागातच सीमित असल्या पाहिजेत. एकमेकांपासून दूर जाणाऱ्या मार्गरेषा सीमित कशा राहणार? उघडच आहे की त्या मार्गरेषांच्या घड्या पडल्या पाहिजेत. ताणणे, संकुचित करणे, घडी करणे ही रूपांतरे गतिशास्त्रीय संहतींचे क्षेत्रविद्यीय गुणधर्म वर्णन करण्यास आवश्यक दिसतात. संहतींच्या

गतिशास्त्राकडे बघण्याचा हा एक अनोखा वेगळाच दृष्टिकोन होता. तोपर्यंत प्रमाण मानलेला, न्यूटन व लायबनिझ यांनी दिलेला दृष्टिकोन क्षणाक्षणाला संहतीत होणारे स्थानिक बदलच लक्षात घेत असे. हे बदल त्या संहतीच्या डिफरेंशियल समीकरणांनुसार होत असतात. प्रावस्था अवकाशातील मार्गरेषांची सार्वत्रिक वर्तणूक लक्षात घेताना नवा दृष्टिकोन संहतीच्या गतिशास्त्राचा साकल्यवादी विचार करतो.

ऐतिहासिकदृष्ट्या गणितज्ज्ञांसाठी हे सर्व तसे नवीन नाही. खरे पाहता महान फ्रेंच गणितज्ज्ञ हेन्री पॉइनकारे यांनी या शतकाच्या सुरुवातीसच यातील बऱ्याच गोष्टींची शक्यता वर्तवली होती. पॉइनकारे सापेक्षतावाद सिद्धान्ताच्याही खूप जवळ पोहोचले होते, पण ही गोष्ट फार प्रसिद्ध नाही. अर्थात येथे एक गोष्ट ध्यानात घेतली पाहिजे की सापेक्षतावादाच्या भौतिक परिणामांची जितकी सखोल जाणीव आइन्स्टाइनना होती तितकी पॉइनकारेना नव्हती. मात्र त्यांची गणिती प्रतिभा नि:संशय अप्रतिम होती. क्षेत्रविद्येच्या अभ्यासाची पायाभरणी त्यांनी केली. तसेच गतिशास्त्रीय संहतींच्या अभ्यासातील क्षेत्रविद्येची मूलगामी भूमिकाही त्यांनीच पुढे मांडली. भरीस भर म्हणजे 'कोलाहल' हा शब्द जन्माला येऊन या विषयाला सध्याचे अव्वल स्थान प्राप्त होण्यापूर्वीच त्यांनी कोलाहलाची शक्यता शब्दांत जितक्या स्पष्टपणे व्यक्त करणे शक्य आहे तितक्या स्पष्टपणे व्यक्त केली होती. परंतु 'योग्य कल्पनेसाठी योग्य वेळ आवश्यक असते' असा जो न्याय आयुष्यात बऱ्याचदा आढळतो, तो विज्ञानक्षेत्रालाही लागू आहे. पॉइनकारे यांचे कोलाहलविषयक विचार त्यांच्या काळाच्या फार पुढचे होते. 1960 च्या दशकाच्या सुरुवातीस 'कोलाहल' मूर्त स्वरूपात अवतरला, कारण तेव्हा एक मानवनिर्मित शक्तिशाली यंत्र उपलब्ध झाले होते : अंकीय संगणक.

हे प्रकरण संदर्भ 17, 4 आणि 21 यांवर आधारित आहे.

भाग दुसरा

कंगोरलेली भूमिती



सहा

कुरूप आणि सुंदर

सौंदर्य बघणाऱ्याच्या नजरेत असते; पण बघणारा एका संस्कृतीचा घटक असतो, आणि प्रत्येक संस्कृतीत प्रत्येक काळात सौंदर्याचे अलिखित मानदंड व कसोट्या असतात. सौंदर्याच्या सर्वात जुन्या कसोट्यांपैकी एक म्हणजे सममिती (symmetry), दोन्ही बाजूंत एकवाक्यता असणारी प्रमाणबद्धता. सममिती, परस्परसंबंधांतील नियमित आकृतिबंध, निरनिराळ्या घटकांचा सुंदर मिलाफ यातून सौंदर्याची निर्मिती होते. एखाद्या सुंदर स्त्रीचा चेहरा म्हणजे अवकाशातील स्थलीय संबंधातील सुसंवाद असतो, तर तिचे मोहक हावभाव कालातील सुसंवाद दाखवितात. असे मानले जाते की जे सुंदर आहे ते सममितीय असले पाहिजे.

सममितीचे गुणगान हजारो वर्षे गायले जात आहे. युक्लिडच्या भूमितीत आपण राहत असलेल्या त्रिमितीय अवकाशाच्या सर्वसाधारण गुणधर्मांचा विचार केला गेला आहे. परंतु तरीही ग्रीकांनी सममितीय वस्तूंवर विशेषकरून लक्ष केंद्रित केल्याचे आढळते : समभुज त्रिकोण, चौरस, वर्तुळ, शंकू, सिलिंडर (चिती), गोल इत्यादी. गोल म्हणजे त्रिमिती अवकाशातील सर्वाधिक सममितीय वस्तू. त्यामुळे आकाशातील ग्रहतारे स्वर्गीय गोलामध्ये जडवून ठेवलेले आहेत असे मानणे नैसर्गिकच होते. टॉलेमीचे खगोलशास्त्र म्हणजे विरोधी पुरावा असूनही सममितीच्या कल्पनेस चिकटून राहण्याचा धीरोदात्त प्रयत्न होता. ग्रहांच्या सूर्याभोवती फिरण्याच्या कक्षा वर्तुळाकार नसून लंबवर्तुळाकार आहेत या केपलरच्या शोधाचे स्वागत अविश्वास व भीतियुक्त त्रेधातिरपिटीने झाले होते. खुद्द देवाने ठरवून दिलेल्या आदर्श वर्तुळाकार सममितीपासून आकाशातील ग्रहताऱ्यांची हालचाल ढळते हे अगम्यच होते.

शाळेत आपण जी भूमिती शिकतो ती नियमित, सममितीय आकारांची वा त्यांपासून थोड्याशाच वेगळ्या आकारांची भूमिती असते. आणि हे तसे नैसर्गिक समजण्याजोगेच आहे, कारण नियमित आकारांच्या वस्तूंचे गुणधर्महीं साधेसोपे व सहज लक्षात ठेवण्याजोगे असतात. वर्तुळाचा परीघ त्याच्या व्यासाच्या π पट असतो. शंकूचे आकारमान त्याची उंची व पायाच्या त्रिज्येचा वर्ग यांच्या गुणाकाराच्या $\pi/3$ पट असते. विज्ञानाच्या

विचारपद्धतीवरही नियमित भूमितीचा प्रभाव असतो. आपण अणूतील वर्तुळाकार कक्षा, रेणूंच्या चार-पृष्ठी रचना, षटकोनी व घनाकृती स्फटिक जाळी इत्यादीबद्दल बोलतो. कला व वास्तुरचनाशास्त्रात भूमितीय सममितीने नवरचनेला प्रोत्साहनच दिले आहे. गॉथिक कॅथेड्रलची भारावून टाकणारी नियमित आखीवरेखीवता, मीनाक्षी मंदिराची सुंदर सममिती, व ताजमहालच्या रचनेतील तरल सुसंवाद याचे साक्षी आहेत.



आकृती 6.1 : भूमितीतील नियमितता आणि सममिती यांनी कला आणि वास्तुशास्त्राला स्फूर्ती पुरवली आहे.

परंतु येथे एक विरोधाभासही आहे. आपल्या सभोवताली जे अनेकविध आकार नैसर्गिकरीत्या तयार होत असतात ते बहुतांशी अनियमित व असममिती असतात. पृथ्वीचा पृष्ठभाग वेड्यावाकड्या भेगांनी व प्रस्तरभंगांनी भरलेला आहे. दुरून साजरे दिसणारे डोंगर जवळून पाहिल्यास अतिशय व्यामिश्र, वेड्यावाकड्या आकाराचे आढळून येतात. एका उंचवट्यावर दुसरा उंचवटा, त्यावर अधिक उंचवटे अशी उतरंड आढळून येते. ढग वेडेवाकडे बहुविध आकार धारण करत असतात. नकाशात दाखविलेली असते त्या प्रकारची व्यवस्थित वक्राकार किनारपट्टी कधीच अस्तित्वात नसते; ती अत्यंत वेडीवाकडी, खाचाखोचांनी भरलेली, कंगोरलेली असते. वीज काही सरळ रेषेत कोसळत नाही, तिचा मार्ग फारच नागमोडी असतो. झाडांची पाने वा नेचे यांचे लांबून नियमित वाटणारे आकारही जवळून तपासल्यास त्यांच्या कडा नागमोडी, खाचांनी भरलेल्या आढळतात.

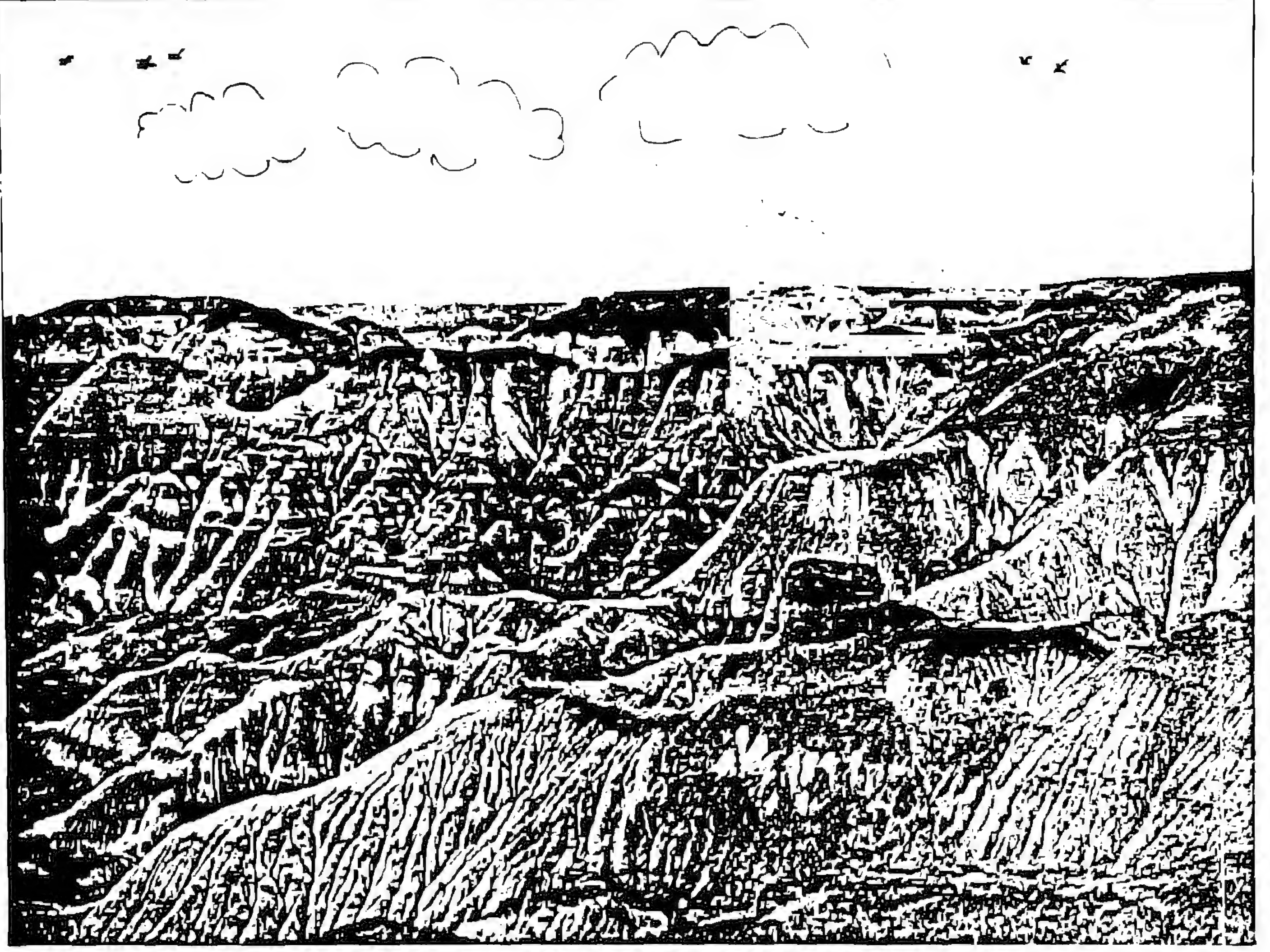
निसर्गात सामान्यत: आढळून येणाऱ्या आकारांचा नियमित, सममितीय भूमितीशी काही संबंध असलेला आढळत नाही. 'दैवी' आकार आदर्श, निर्दोष व सममितीय असतात आणि सममितीपासून ढळणे हे पृथ्वीवरील माणसांच्या दोषांमुळे व अपूर्णतेमुळे घडून येते, हा ग्रीकांचा विचार अगदी चुकीचा होता. निसर्ग मूलत: अनियमित, कंगोरलेली, खाचाखोचांची भूमिती पाळतो असेच दिसून येते. हे क्रांतिकारी विधान प्रथम मांडले ते बेनॉ

मॅन्डेलब्रॉट या विक्षिप्त बुद्धिवंताने. मॅन्डेलब्रॉटनी अर्थशास्त्र, अभियांत्रिकी आणि वैद्यकी अशा फार भिन्न विषयांत आपले डोके खुपसले आहे. परंतु मूलत: ते आहेत प्रचंड भूमितीय अंत:प्रज्ञा असलेले गणिती. त्यांच्या प्रसिद्ध काव्यमय ओळीत निसर्गाच्या आवडत्या भूमितीचे सार पकडलेले आहे - 'ढग नाहीत गोलाकार, डोंगर नाहीत शंक्वाकार.'

सामान्यत: आढळणारे निसर्गातील अनेक आकार खूप अनियमित असतात असे म्हणण्यात फार मूलगामी व धक्कादायक काय आहे? आपणा सर्वांना हे केव्हापासून माहीत आहे आणि आपण त्याची फार चिंताही करत नाही. परंतु निसर्गात व्यामिश्र, क्लिष्ट आकार आढळतात ही वस्तुस्थिती निव्वळ सांगून मॅन्डेलब्रॉट थांबत नाहीत. त्यांचा दावा यापलीकडचा आहे. त्यांच्या म्हणण्याप्रमाणे निसर्गातील व्यामिश्र, अनियमित आकारांत दडली आहे एक वेगळ्याच प्रकाराची नियमितता व सममिती. ही सममिती नेहमीच्या प्रकारची - म्हणजे परिवलनाशी (अक्षाभोवती फिरणे) वा परिवहनाशी संबंधित नाही. ही सममिती मापप्रमाणाशी वा आकाराशी संबंधित आहे. निसर्गातील अनेक स्वयंभू आकार हे वेगवेगळ्या मापप्रमाणात स्वयंसमरूप असतात. एखादा डोंगर वा खडक अथवा किनारपट्टी वा ढग अशा भूशास्त्रीय आकृतीच्या छायाचित्राचे निरीक्षण करा. नुसते पाहून आकार सांगता येत नाही. छायाचित्रात एखादे मंदिर वा झाड यासारखी विशिष्ट आकाराची वस्तू असेल तरच त्या मूळ आकृतीच्या आकाराचा अंदाज बांधणे शक्य होते. या नैसर्गिक आकारांमध्ये लांबीचे विशिष्ट मापप्रमाण अंतर्भूत नाही. हे आकार वेगवेगळ्या प्रमाणात मोठे केले, तपशिलाच्या वेगवेगळ्या पातळ्यांवर तपासले तर त्यात समरूपता आढळून येते.

अशा प्रकारची गुप्त दडलेली नियमितता खरोखरच कोड्यात टाकणारी आहे. एखादा व्यामिश्र, वेडावाकडा आकार क्लिष्ट व स्वैरपणे बदलणाऱ्या कारणांमुळे उद्‌भवतो असे मानले जाते. ढगनिर्मितीची प्रक्रिया तपशिलात इतकी किचकट आहे की ती खरे म्हणजे अजूनपर्यंत धड कळलेलीच नाही. सागराच्या स्वैर व जोरदार लाटांमुळे जमिनीची होणारी धूप किनारपट्टीची निर्मिती करते. किनारपट्टी, ढग, डोंगर यांच्या अनियमित आकारांमध्ये एक सूक्ष्म तरल नियमितता दडलेली आहे याची कल्पना करणेही फार अवघड आहे. प्रकरण 2 मध्ये प्राणिसंख्याबदलाच्या बाबत कालावकाशात जे होताना आपण पाहिले त्याच प्रकारची गोष्ट येथे स्थलावकाशात होताना आढळते. तेथे एक साधी, निश्चिततावादी नियम पाळणारी संहती स्वैरपणे हालचाली करत असल्याचे आपण बघितले. मॅन्डेलब्रॉटनी दाखवून दिले की स्थलावकाशातील वरवरच्या स्वैर अनियमिततेमागे एक अंतर्गत सममिती दडलेली आहे - वेगवेगळ्या मापप्रमाणातील स्वयं-समरूपता या दोन्ही संदर्भातून एकच मूलभूत संदेश मिळतो : व्यामिश्र, क्लिष्ट वर्तणूक स्वैर बदलत्या कारणांमुळेच निर्माण होते असे नाही. कालावकाशातील वा स्थलावकाशातील व्यामिश्र वर्तणुकीमागे एखादी सरळसाधी नियमितता वावरत असणे शक्य आहे.

सौंदर्याचा उद्‌भव सममितीतून होतो. परंतु दीर्घकाळ सममिती म्हणजे फक्त परिवलन वा परिवहन यांच्याशी संबंधित सममिती असे मानण्याची चूक आपण करत होतो. आता आपल्याला कळून चुकले आहे की निसर्गाला एका वेगळ्याच सममितीची आवड आहे.



आकृती 6.2 : पर्वतराशीसारख्या भूशास्त्रीय आकृतीच्या छायाचित्रावरून तिच्या आकाराचा अंदाज बांधणे कठीण असते. त्यासाठी एखादी विशिष्ट आकाराची वस्तू (उदा. मंदिर) छायाचित्रात असणे जरूर असते.

निसर्गातील अनियमित 'कुरूप' आकार या नव्या प्रकारच्या सममितीशी जुळणारेच आहेत. त्यांतील कुरूपता फक्त वरवरची, पृष्ठभागीय आहे. त्याखाली एक नवी आवर्ती सममिती दडलेली आहे. मॅन्डेलब्रॉटनी ती उघडकीस आणून तपासली. त्या शोधातून त्यांच्या हाती एक महत्त्वपूर्ण कल्पना गवसली - भूमितीय वस्तूंच्या अपूर्णांकीय मितीची कल्पना.

या, तसेच पुढील प्रकरणातील संकल्पना अपूर्णमितावरील कोणत्याही पुस्तकात सापडतात. उदा. संदर्भ 4, 18 आणि 21 पाहा.

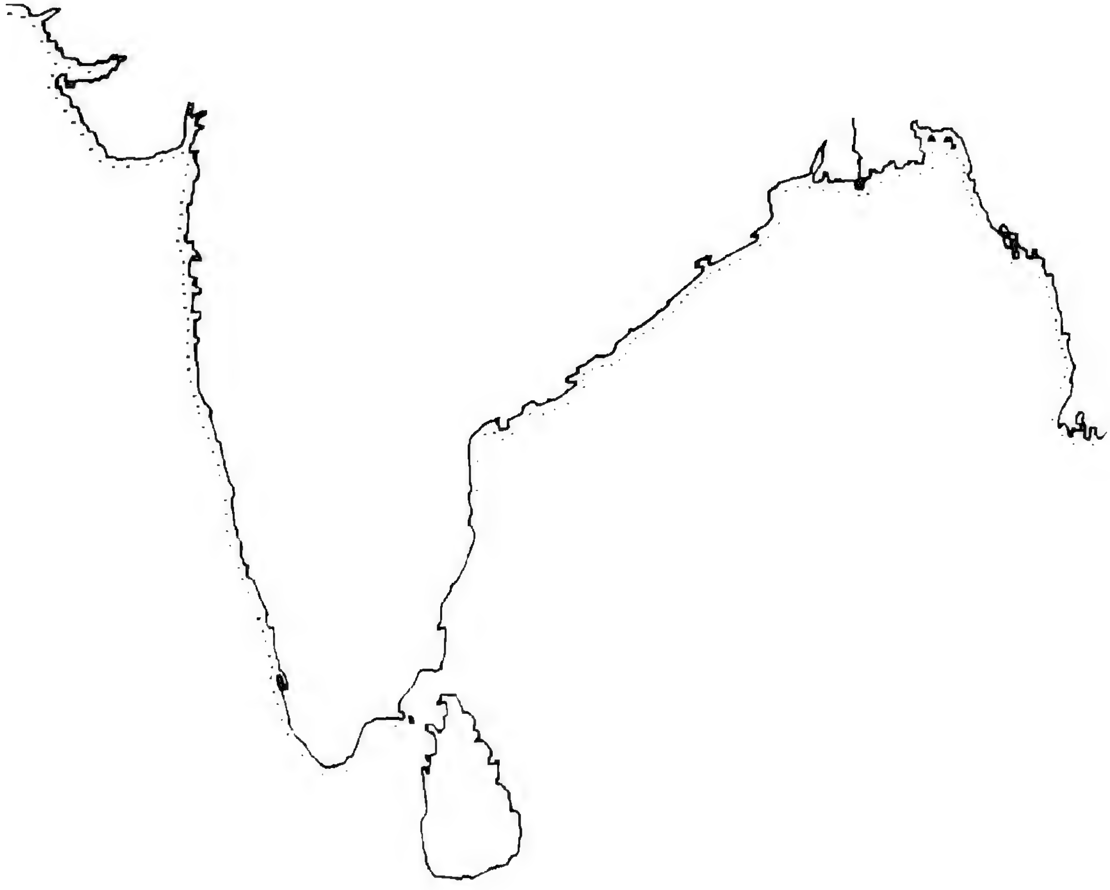
सात

ब्रिटनची किनारपट्टी

ब्रिटिश साम्राज्यावर सूर्य मावळायला लागून आता काही काळ लोटला आहे. ते साम्राज्य आता ब्रिटनच्या किनारपट्टीपर्यंत आक्रसले आहे. परंतु ही किनारपट्टी किती मोठी आहे? 'इंग्लंडच्या किनाऱ्याची लांबी किती?' या प्रश्नाला मॅन्डलब्रॉटनी प्रसिद्धी मिळवून दिली. वरवर साध्या भासणाऱ्या या प्रश्नाने काही अनपेक्षित व समृद्ध कल्पनांची दालने आपल्यासमोर उघडलेली आहेत. यातील अनेक कल्पना एकोणिसाव्या शतकातील गणिती संशोधनामध्ये गाडून पडलेल्या होत्या. मॅन्डेलब्रॉटनी त्या उकरून काढल्या, त्यांचा विस्तार केला आणि त्यांचे प्रचंड महत्त्व जगाच्या नजरेसमोर आणले.

वर विचारलेल्या प्रश्नाचे थोडक्यात उत्तर आहे : किनारपट्टीची लांबी मापनपट्टीच्या आकारावर अवलंबून असते. उदाहरणार्थ, 10 मीटर लांबीची पट्टी वापरली तर आपल्याला किनारपट्टीच्या लांबीचा एक आकडा मिळेल. परंतु ही काही खरी लांबी असणार नाही. कारण 10 मीटरपेक्षा खूपच कमी लांबी असणाऱ्या खाचाखोचा व बाक या मापनात लक्षातच घेतले जाणार नाहीत. आपण जर 1 मीटरची पट्टी वापरली तर अधिक तपशिलात मोजमाप शक्य होईल व लांबीही पहिल्यापेक्षा अधिक भरेल. मापनपट्टी अधिकाधिक छोट्या आकाराची निवडत गेल्यास किनारपट्टीची लांबी दर्शविणारा आकडा वाढत जाईल.

किनारपट्टीची लांबी मापप्रमाणावर अवलंबून असते हे वेगळ्या प्रकारेही आपण बघू शकतो. समजा, ज्ञानकोशात एका देशाच्या किनारपट्टीची लांबी 10,000 कि.मी. दिली आहे. बहुधा अशा मापनाचे मापप्रमाण दिलेले नसतेच. परंतु आपण असे धरून चालू की 1 कि.मी.च्या मूलभूत मापप्रमाणावरून ही लांबी मोजली गेली आहे. या किनारपट्टीचे रक्षण करण्यासाठी किती तटरक्षकांची गरज आहे? उघडच आहे की याचे उत्तर दोन रक्षकांत किती अंतर असणार यावर अवलंबून आहे. 1 कि.मी.चे अंतर धरल्यास 10000 रक्षक लागतील. परंतु आपण जर संपूर्ण किनारपट्टी 'मानवी साखळी' तयार करून संरक्षित करायचे ठरविले तर? त्यासाठी दोन रक्षकांमधील सरासरी अंतर 1 मी. ठेवावे लागेल असे असे मानू. येथे दोन रक्षकांतील अंतर एक हजारांशाने कमी झाल्याने रक्षकांची संख्या हजारपटीने वाढेल असे



आकृती 7.1 : भारताच्या किनारपट्टीचे संरक्षण करण्याचे दोन मार्ग : (अ) 1 कि.मी. अंतरावर तटरक्षक नेमणे, (ब) एकमेकांपासून 1 मी. अंतरावर उभ्या रक्षकांची 'मानवी साखळी' तयार करणे. (ब) मध्ये लागणाऱ्या माणसांची संख्या (अ) मध्ये लागणाऱ्या रक्षकसंख्येपेक्षा हजारपटीहूनही जास्त असते. हे अनपेक्षित घडण्याचे कारण म्हणजे किनारपट्टी हा एकापेक्षा अधिक मिती असलेला अपूर्णमित आहे.

प्रथमदर्शनी वाटते. म्हणजे आपल्याला 10000 × 1000 बरोबर 1 कोटी माणसे किनारपट्टीवर मानवी साखळी उभी करायला लागतील. (आकृती 7.1)

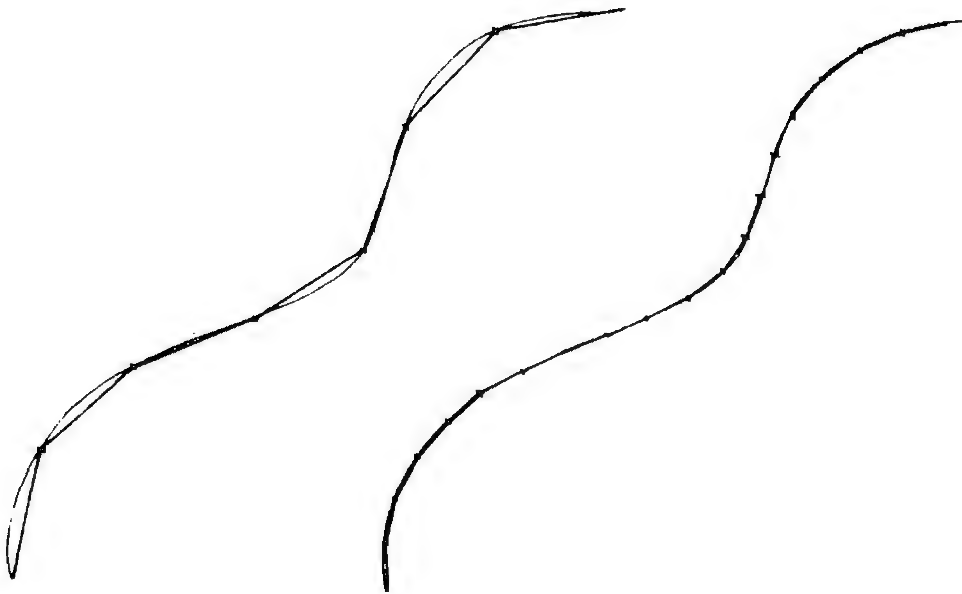
पण हे उत्तर चुकीचे आहे. सरळ रेषांशी किंवा वर्तुळ वा पॅराबोला यांच्यासारख्या सफाईदार वक्रांशी (smooth curves) आपला फार वेळा संबंध येत असतो. त्यातून निर्माण झालेल्या अंत:प्रेरणेतून वरील उत्तर आपल्या तोंडातून बाहेर पडते. एखाद्या सरळ रेषाखंडाची लांबी निश्चित असते. तो रेषाखंड छोट्याछोट्या तुकड्यांनी जुळवून आणायचा म्हटले तर अशा तुकड्यांची संख्या त्यांच्या आकाराच्या व्यस्त प्रमाणात असणार हे स्पष्टच आहे. 1 मीटर लांबीचा रेषाखंड आच्छादायचा म्हटले तर 1 सें.मी.चे 100 तुकडे लागतील, वा 1 मि.मी.चे 1000 तुकडे लागतील. जर तुकड्याचा आकार l असेल व L लांबीचा रेषाखंड आच्छादण्यास लागणाऱ्या तुकड्याची संख्या N असेल तर अर्थातच $L = N.l$. म्हणजेच $N \propto 1/l$ (N ही संख्या l च्या व्यस्तप्रमाणात बदलते). एखाद्या सफाईदार वक्राची लांबीही निश्चित असते. अशा वक्राच्या एका टोकापासून दुसऱ्या टोकापर्यंत जाण्यासाठी आपण छोट्या जीवांच्या (chords) पायऱ्या टाकू शकतो व त्यावरून वक्राच्या लांबीचा अंदाज बांधू शकतो. जर अशा प्रत्येक जीवेची लांबी l असेल आणि एकूण जीवांची संख्या N असेल तर $N \times l$ हा गुणाकार वक्राची लांबी अदमासे दर्शवितो, ती खरी लांबी L नसते.

मात्र इथे लक्षात घेण्याची महत्त्वाची गोष्ट म्हणजे जसजशी जीवेची लांबी कमी कमी केली जाते म्हणजेच परिणामी जीवांची संख्या मोठी मोठी होत जाते तसतसा एकूण लांबीचा अदमास खऱ्या लांबीच्या अधिकाधिक जवळ येत जातो. गणिती भाषेत बोलायचे तर : जशी l ची किंमत शून्याकडे सरकते आणि N अनंताकडे झेपावतो, तसा $N.l$ हा गुणाकार वक्राच्या खऱ्या लांबीची L ही किंमत गाठतो. दुसऱ्या भाषेत सांगायचे तर, *L ची किंमत कमी असताना*, सरळरेषेप्रमाणेच सफाईदार वक्राच्या बाबतही $N \propto 1/l$. (आकृती 7.2)

परंतु किनारपट्टी काही अशा सफाईदार वक्रासारखी नसते. तिचे जवळून निरीक्षण करण्यासाठी आपण अधिकाधिक लहान मापप्रमाण घेत गेलो की अधिकाधिक खाचाखोचा व वळणे नजरेस पडत जातात. त्यामुळे किनारपट्टीची लांबी निश्चित, ठरीव नसते. मापनपट्टीची लांबी कमी करावी तशी किनारपट्टीची लांबी वाढत राहते. $N \times l$ हा गुणाकार

l	N
1	1
1/2	2
1/3	3
1/4	4

आकृती 7.2 (अ) : सरळ रेषाखंड लहान लहान l लांबीच्या तुकड्यांनी आच्छादणे. तुकड्यांची संख्या N ही l च्या व्यस्त प्रमाणात बदलते; $N \propto 1/l$

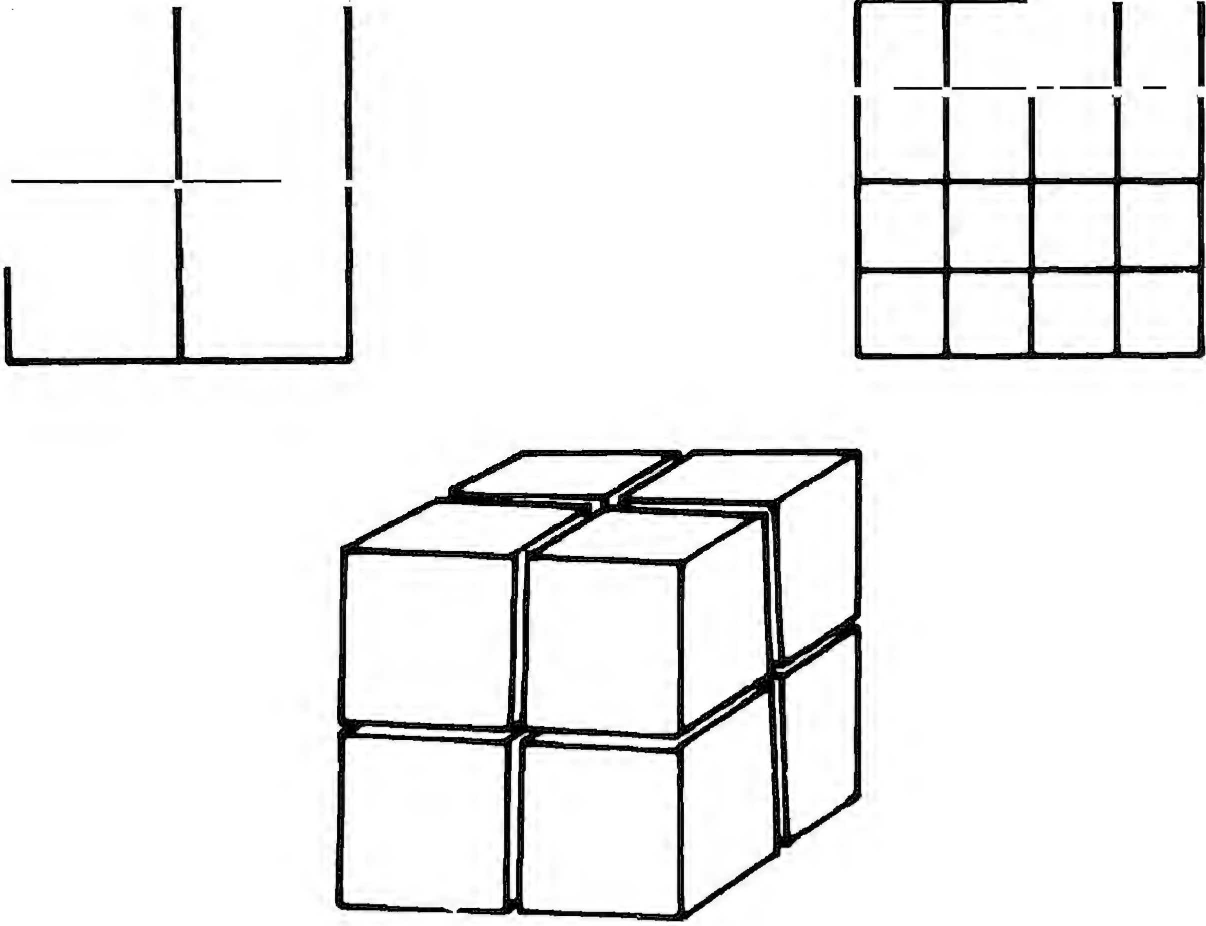


आकृती 7.2 (ब) : l लांबीच्या जीवांच्या पायऱ्यांनी सफाईदार वक्र पादाक्रांत करणे. l ची लांबी कमी होते तसा Nl हा गुणाकार त्या वक्राच्या खऱ्या लांबीकडे सरकतो. अपूर्णमित किनारपट्टीबाबत Nl ची किंमत अमर्याद वाढत जाते. परंतु Nl^D मात्र एका निश्चित स्थिर किमतीकडे सरकतो. D ह्या त्या अपूर्णमिताच्या मितीची किंमत 1 व 2 या दरम्यान असते.

सफाईदार वक्राच्या बाबत लांबीच्या एक. निश्चित किमतीवर एकवटतो तसे येथे होत नाही. l ची किंमत कमी करावी तशी N ची संख्या अधिक जोमाने वाढते व त्यामुळे $N \times l$ हा किनारपट्टीची लांबी दाखविणारा गुणाकार अमर्याद वाढत जातो.

ही परिस्थिती एकंदरीत निराशाजनकच वाटते, पण ते खरे नाही. किनारपट्टी हा काही एखादा अनियमित वेडाविद्रा वक्र नाही. वेगवेगळ्या मापप्रमाणांत स्वयं-समरूपता असणारा हा वक्र आहे. l कमी होताना N ची होणारी वाढ ही अगदी काटेकोर नियमित प्रकारे होते. यातून ही स्वयं-समरूपता प्रतिबिंबित होते. किनारपट्टीबाबत आढळून आले आहे की सफाईदार वक्राबाबतचा $N \propto 1/l$ हा संबंध येथे लागू पडत नसला तरी तितकाच सरळ सोपा दुसरा संबंध लागू पडतो. तो म्हणजे $N \propto 1/l^D$. येथे D हा 1 आणि 2 यांच्यामधील एक अपूर्णांक असतो. log N आणि log l यांचा आलेख काढल्यास त्याच्या उतारावरून (वा चढावरून) D ची किंमत प्रत्यक्षात काढता येते. असे समजा की एखाद्या विशिष्ट किनारपट्टीबाबत D ची किंमत (जवळपास) 1.25 आहे. आता आपण आधी विचारलेल्या प्रश्नाचे निश्चित उत्तर देऊ शकतो; जर l ची किंमत 1000 पटीने कमी केली, तर N ची किंमत $(1000)^{1.25}$ पटीने वाढेल. $(1000)^{1.25}$ ची किंमत जवळपास 5,623 भरते. निरनिराळ्या किनारपट्टींबाबत D ची किंमत वेगवेगळी असू शकते. परंतु यातील मूळ मुद्दा तोच राहतो - एखाद्या किनारपट्टीचे मापन करताना टाकाव्या लागणाऱ्या पावलांची संख्या, N, ही त्यासाठी वापरलेल्या मापनपट्टीच्या आकाराशी सरळसोप्या प्रकारे संबंधित असते. किनारपट्टीच्या खाचाखोचांनी भरलेल्या वाकड्यातिकड्या अनियमित आकारामागे विश्वास बसणार नाही असा नियमितपणा दडलेला असतो. किनारपट्टीची लांबी $N \times l$ अमर्यादित वाढत जाते, परंतु $N \times l^D$ ह्या पदाची किंमत मात्र मर्यादित स्थिर संख्येच्या दिशेने सरकते. आपण $N \times l^D$ पदालाच त्या किनारपट्टीची 'लांबी' वा 'माप' म्हणू शकतो, परंतु त्याला आपण काय नाव देतो हे तसे महत्त्वाचे नाही. $N \propto 1/l^D$ (येथे D एक स्थिर संख्या आहे.) हा साधासोपा संबंध त्या किनारपट्टीची वैशिष्ट्ये वर्णन करण्यास पुरेसा पडतो ही गोष्ट खरी महत्त्वाची. D ह्या आकड्याला त्या किनारपट्टीची मिती म्हटले जाते.

एखाद्या सरळरेषाखंडाच्या वा सफाईदार वक्राच्या बाबत N हा अंक l च्या व्यस्त प्रमाणात बदलतो ($N \propto 1/l$) हे आपण आताच पाहिले. म्हणजे वर दिलेल्या व्याख्येप्रमाणे रेषा वा वक्राची मिती, D, ही 1 येते. एखाद्या चौरस तुकड्याची मिती किती असते? उदाहरणार्थ 10 सें.मी. बाजू असलेला एक चौरस घ्या. याचे क्षेत्रफळ 1 से.मी. बाजू असलेल्या चौरस तुकड्यांनी आच्छादायचे म्हटले तर असे किती तुकडे लागतील? याचे उत्तर अर्थातच 100 आहे. जर छोट्या चौरसाची लांबी 10 पट कमी करून 1 मि.मि. केली तर अशा 10,000 छोट्या चौरसांची गरज मूळ चौरस आच्छादायला पडेल. म्हणजे लांबी 10 पटीने कमी झाल्यास, लहान चौरसांची संख्या 100 पटीने वाढते. म्हणजेच चौरस तुकड्यासाठी $N \propto 1/l^2$ हा संबंध येतो. याचा अर्थ चौरसाची मिती D ही 2 येते. याच प्रकारे घनाचा विचार केल्यास त्याची मिती 3 येते. (आकृती 7.3)



आकृती 7.3 : चौरसाबाबत - लहान चौरसाची लांबी निम्मी केल्यास मूळ चौरस भरण्यासाठी लागणाऱ्या लहान चौरसांची संख्या चौपट होते; म्हणजे $N \propto 1/l^2$; चौरसाची मिती दोन आहे. घनाबाबत - $N \propto 1/l^3$, म्हणजे घनाची मिती तीन आहे.

हे सर्व आपल्याला एरवी परिचित असणाऱ्या गोष्टींशी व्यवस्थित जुळून येणारे आहे. सरळ रेषा वा सफाईदार वक्राची मिती 1 आहे, कारण एखाद्या मूळ बिंदूपासून कोणत्याही अन्य बिंदूचे स्थान निश्चित सांगण्यासाठी केवळ एका अंकाची गरज असते. त्याचप्रमाणे प्रतलाची, पृष्ठभागाची मिती 2 असते, कारण त्यावरील कोणत्याही बिंदूचे स्थान निश्चित करण्यासाठी दोन अंक द्यावे लागतात. आणि अवकाशात कोणत्याही बिंदूचे स्थान निश्चित करण्यासाठी 3 अंक जरूर असतात. म्हणजेच $N \propto 1/l^D$ या संबंधात D ला मिती म्हणणे योग्यच ठरते. कारण D = 1,2,3 या पूर्णांक मितींच्या नेहमीच्या प्रमाण अर्थाशी पूर्णपणे जुळणारा अर्थच त्यातून निघतो. परंतु येथे आपल्याला भरीस एका नव्या कल्पनेचा बोनस भेट मिळतो. D फक्त पूर्णांकच असण्याची गरज नाही, ही ती कल्पना. खूप नागमोडी खाचाखोचांचे वक्र व ओबडधोबड असमतल पृष्ठभागांच्या बाबत D ची किंमत अपूर्णांक असू शकते! $N \propto 1/l^D$ या संबंधाद्वारे भूमितीय वस्तूची मिती या संकल्पनेचे एक आश्चर्यकारक व्यापकीकरण आपल्या हाती येते. भूमितीय वस्तूंच्या मिती पूर्णांकी तसेच अपूर्णांकीही असू शकतात. अशा वस्तूंचे वर्णन करण्यास मॅन्डेलब्रॉट यांनी एका सुंदर नवीन शब्दाची योजना केली : *फ्रॅक्टल, अपूर्णमित.*

आठ

स्वयं-समरूपतेची बीजे

देशाच्या किनाऱ्यावर सफर करत असताना आपल्या हाती दोन संकल्पनारत्ने गवसली आहेत. एक - अनियमित वेडीवाकडी वळणे घेत जाणारी ती किनारपट्टी स्वयं-समरूप आहे. म्हणजे वेगवेगळ्या मापप्रमाणावर तिचे स्वरूप सारखेच दृष्टीस पडते. दोन - किनारपट्टीचे माप घेण्यासाठी लागणाऱ्या छोट्या रेषाखंडांची संख्या N व त्या रेषाखंडाची लांबी l यांच्यातील संबंध $N \propto 1/l^D$ अशा प्रकारचा असतो. येथे D अपूर्णांक असून त्याची किंमत 1 व 2 च्या दरम्यान असते. या दोन्ही संकल्पना एका मूलभूत वस्तुस्थितीमुळे परस्परांशी जोडल्या गेल्या आहेत. निसर्गातील स्वयं-समरूपतेची बीजे घातांकीय नियमांत आहेत, ही ती वस्तुस्थिती.

जेव्हा एखादे परिमाण दुसऱ्या परिमाणाच्या घातांकानुसार बदलते तेव्हा त्या संबंधाला घातांकीय नियम म्हटले जाते. $Y = X$ हा घातांक 1 असलेला घातांकीय नियम आहे. परंतु घातांकीय नियम रेषीय असणे जरुरीचे नसते. $Y = X^2$, $Y = 1/X$, $Y = X^{1/2}$, $Y = X^{2/3}$ हेही घातांकीय नियम आहेत. यानुसार एखाद्या वस्तूच्या मितीची व्याख्या करणारा $N \propto l^{-D}$ हा संबंध N आणि l यांच्यामधील घातांकीय नियम असून त्यातील घातांक $-D$ (उणे D) इतका आहे.

घातांकीय नियमात स्वयं-समरूपतेचे बीज का असावे? कारण सरळ आहे. घातांकीय नियमात लांबीचे विशिष्ट माप अंतर्भूत नसते. तो नियम सर्व मापप्रमाणात लागू असतो. याविरुद्ध त्रिकोणमितीय ज्याकृती फल (trigonometric sinusoidal function) दर्शविणारा $Y = \sin (X/\lambda)$ अशासारखा नियम घातांकीय नाही. त्यात स्वत:ची विशिष्ट अशी एक लांबी, λ, अंतर्भूत आहे. या नियमात विशिष्ट लांबी लागते. मात्र $Y = X^2$ अशा घातांकीय नियमात ती लागत नाही. याचे कारण काय? कारण असे की X^2 या परिमाणाला पूर्णपणे निश्चित अशी मिती आहे. X जर मीटरमध्ये असेल तर X^2 मीटर-वर्ग असतो. याउलट sine X हे त्रिकोणमितीय ज्या-फल म्हणजे X चे वेगवेगळे घातांक असलेल्या पदांची बेरीज आहे. मितीय दृष्टीने या फलाचा सुसंबद्ध अर्थ लागण्यासाठी त्याचा कोनांक (argument) अमितीय, मितीहीन असणे आवश्यक असते. त्यामुळे ज्या-फलाच्या कोनांकातील

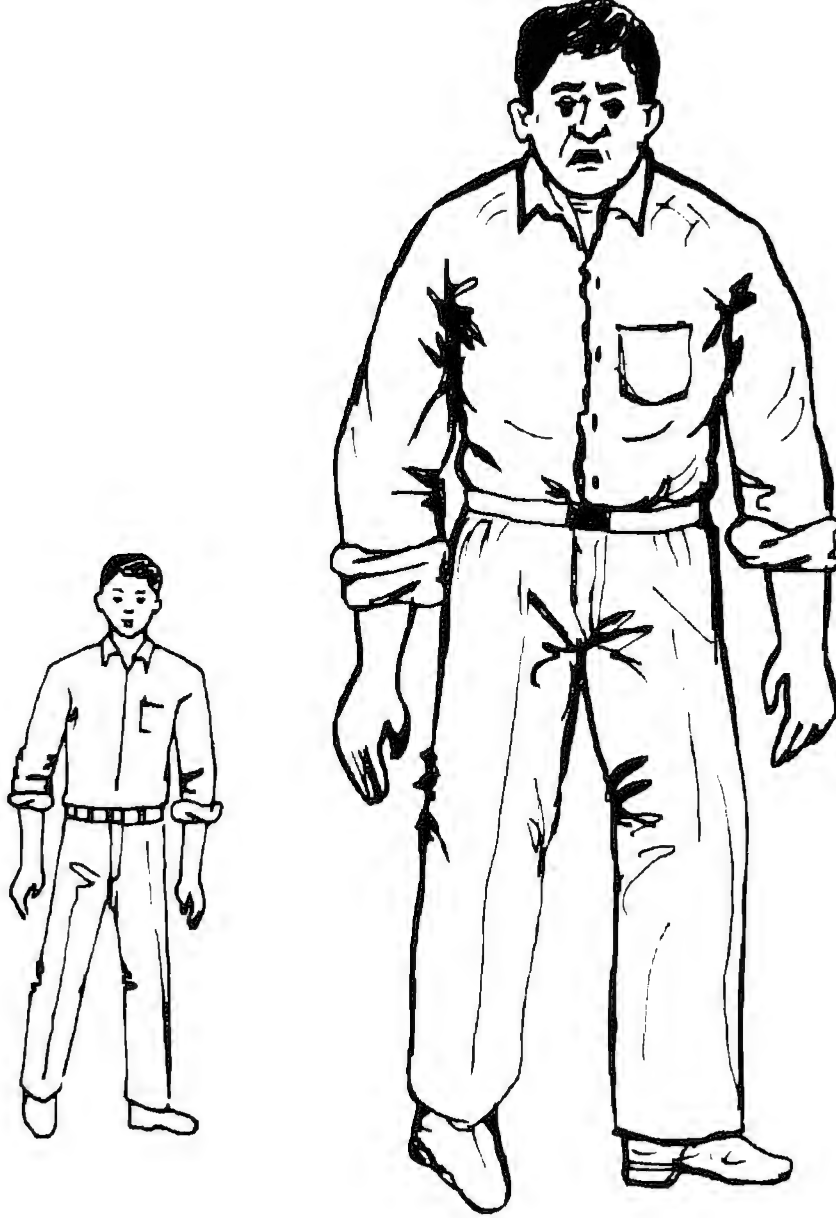
लांबीला, X ला, λ या दुसऱ्या लांबीने भागावे लागते, म्हणजे तो कोनांक मितीहीन होतो. अशा नियमांनुसार चालणाऱ्या प्रक्रिया विशिष्ट लांबी दर्शवितात. घातांकीय नियमांनुसार चालणाऱ्या प्रक्रियांत अशी विशिष्ट लांबी नसते.

विज्ञानातील काही सोपी उदाहरणे हा मुद्दा लक्षात आणून देतात. गुरुत्वाकर्षणाचा नियम घातांकीय आहे. गुरुत्वाकर्षण बल r^{-2} अशा प्रकारे बदलते. येथे r म्हणजे दोन वस्तुकणांमधील अंतर. या नियमात कोणतेही अंगभूत लांबीचे मापप्रमाण नाही. लांबी व कालाची मापप्रमाणे गरजेप्रमाणे वाढवून एखाद्या लहान कक्षेपासून ग्रहांच्या मोठ्या कक्षाही सहजपणे मिळवता येतात. याउलट, प्रकाश एखाद्या माध्यमातून जाताना काटलेल्या अंतरानुसार त्याची तीव्रता कशी क्षीण होत जाते हे सांगणारा नियम घातांकीय नाही. त्यामुळे येथे एक अंगभूत लांबी येते. किती अंतर कापल्यावर प्रकाशाची तीव्रता सुरुवातीच्या तीव्रतेच्या निम्मी होईल हे ही लांबी दर्शविते. जेव्हा एखाद्या प्रक्रियेत अशा प्रकारची अंगभूत लांबी असते तेव्हा त्यात वेगवेगळ्या मापप्रमाणातील निश्चलता आणि स्वयं-समरूपता असत नाही. ज्या वेळी अंगभूत लांबी नसते तेव्हा वेगवेगळ्या मापप्रमाणात सममिती असते व त्यातूनच स्वयं-समरूपता उदय पावते.

मापप्रमाण निश्चलता असणे वा नसणे हा एक महत्त्वाचा सर्वसाधारण गुणधर्म आहे. त्याचा वापर करून कधीकधी एखाद्या प्रश्नाच्या तपशिलात न शिरता चटकन उत्तरे मिळवणे शक्य होते. उदाहरणार्थ माणसाचा सर्वसाधारण आकार कशावरून ठरतो ? हा आकार निश्चित करणाऱ्या नियमांत एक अंगभूत आकारमान असणार ही गोष्ट स्पष्टच आहे. तसे नसते तर या पृथ्वीतलावर एका बाजूला राक्षसी आकारांची तर दुसरीकडे 'हनी, आय श्रंक द किडस्' या सिनेमात दाखविल्याप्रमाणे चिमुकली माणसे सर्वत्र वावरताना दिसली असती. प्राण्यांचे आकार ठरविणाऱ्या नियमांना मापप्रमाणात बदल झालेले चालत नाहीत, ही गोष्ट प्रथम गॅलिलिओने आपल्या नजरेस आणली. समजा माणसाची प्रत्येक बाजू दुप्पट केली, तर त्याचे वजन (2 चा घन) आठपट वाढेल. परंतु हाडे दुप्पट झाल्यावर त्यांच्या छेदांचे क्षेत्रफळ मूळ क्षेत्रफळाच्या चारपटच वाढेल व त्यामुळे हाडांची वजन पेलण्याची क्षमताही फक्त चारपट वाढेल. म्हणजे या प्रकारे माणसाचा आकार सर्व बाजूंनी वाढविल्यास तो स्वतःच्या वजनानेच कोसळून पडेल! हाडांची ताकद निश्चित करणारे घटक आणि पृथ्वीच्या गुरुत्वाकर्षणाचे बल अशा प्रकारे माणसाचा सर्वसाधारण सरासरी आकार निश्चित करतात.

तिसऱ्या प्रकरणात निर्देश केलेला रेषीय लंबकाचा सर्वपरिचित नियम मापप्रमाणातील अवलंबित्व विचारात घेतल्यास दोन-चार ओळींत स्पष्ट होतो. आपल्याला माहीत आहे की वस्तूची गतिजन्य ऊर्जा निम्मे वस्तुमान गुणिले वेगाचा वर्ग (1/2 mv2) इतकी असते, तर रेषीय लंबकाची स्थितिजन्य ऊर्जा त्याच्या केंद्रस्थितीपासूनच्या विस्थापनाच्या वर्गाच्या प्रमाणात बदलते (Kx^2). आता वेग म्हणजे विस्थापना भागिले वेळ हे आठवा. यावरून दिसून येते की लांबीचे मापप्रमाण बदलल्यावर जर गतिजन्य व स्थितिजन्य ऊर्जा सारख्याच प्रमाणात बदलायच्या असतील तर वेळेच्या मापप्रमाणात बदल होता कामा नये. म्हणजे वेळेचे माप तेच राहिले पाहिजे. रेषीय लंबकाचा आंदोलनकाल त्याच्या आंदोलनविस्तारावर

अवलंबून नसतो हा (एरवी कॅलक्युलस वापरून काढला जाणारा) नियम येथे सिद्ध होतो. याच प्रकारचे विश्लेषण पृथ्वीच्या गुरुत्वाकर्षणक्षेत्रात खाली पडणाऱ्या वस्तूबाबत केल्यावर लक्षात येते की वस्तूला जमिनीवर पोहोचण्यास लागणारा वेळ ज्या उंचीवरून ती पडते तिच्या वर्गमूळाच्या प्रमाणात असतो.



आकृती 8.1 : माणसाचे आकारमान दुप्पट केल्यास तयार होणारी आकृती अस्तित्वात येणे अशक्य आहे. मानवी आकार निश्चित करणारे नियम मापप्रमाण निश्चल नसून, त्यांत एक विशिष्ट आकार अंतर्भूत असतो.

आपल्या सभोवताली आढळून येणाऱ्या नैसर्गिक आकारांमधील स्वयं-समरूपतेची बीजे त्यामागील घातांकीय नियमांमध्ये आहेत. अर्थात ते आकार निश्चित करणाऱ्या मूलभूत भौतिक प्रक्रियांतूनच हे घातांकीय नियम उगम पावले आहेत. या प्रक्रिया अत्यंत व्यामिश्र असून अनेकदा त्यांचे तपशीलवार वर्णन अशक्यप्रायच असते. परंतु त्यांचे एक साधे लक्षण असते. त्यांच्यात कोणतीही विशिष्ट लांबी अंगभूत नसते व त्यामुळेच ते घातांकीय नियम व स्वयं-समरूपता जन्माला घालतात. उदाहरणार्थ, पृथ्वीचे स्थलस्वरूप (किनारपट्ट्या, डोंगरदऱ्या इ.) धूप होण्याच्या प्रक्रियांतून निश्चित होते, आणि या प्रक्रियांत जवळजवळ मापप्रमाण निश्चलता आढळून येते. त्यामुळे प्रचंड व्यामिश्रता असूनही या प्रक्रिया स्वयं-



आकृती 8.2 : निसर्गातील स्वयं-समरूप (अपूर्णमित) आकारांचे मूळ ते निर्माण करणाऱ्या भौतिकी प्रक्रियांत एखादी अंगभूत लांबी नसण्याशी जोडलेले असते.

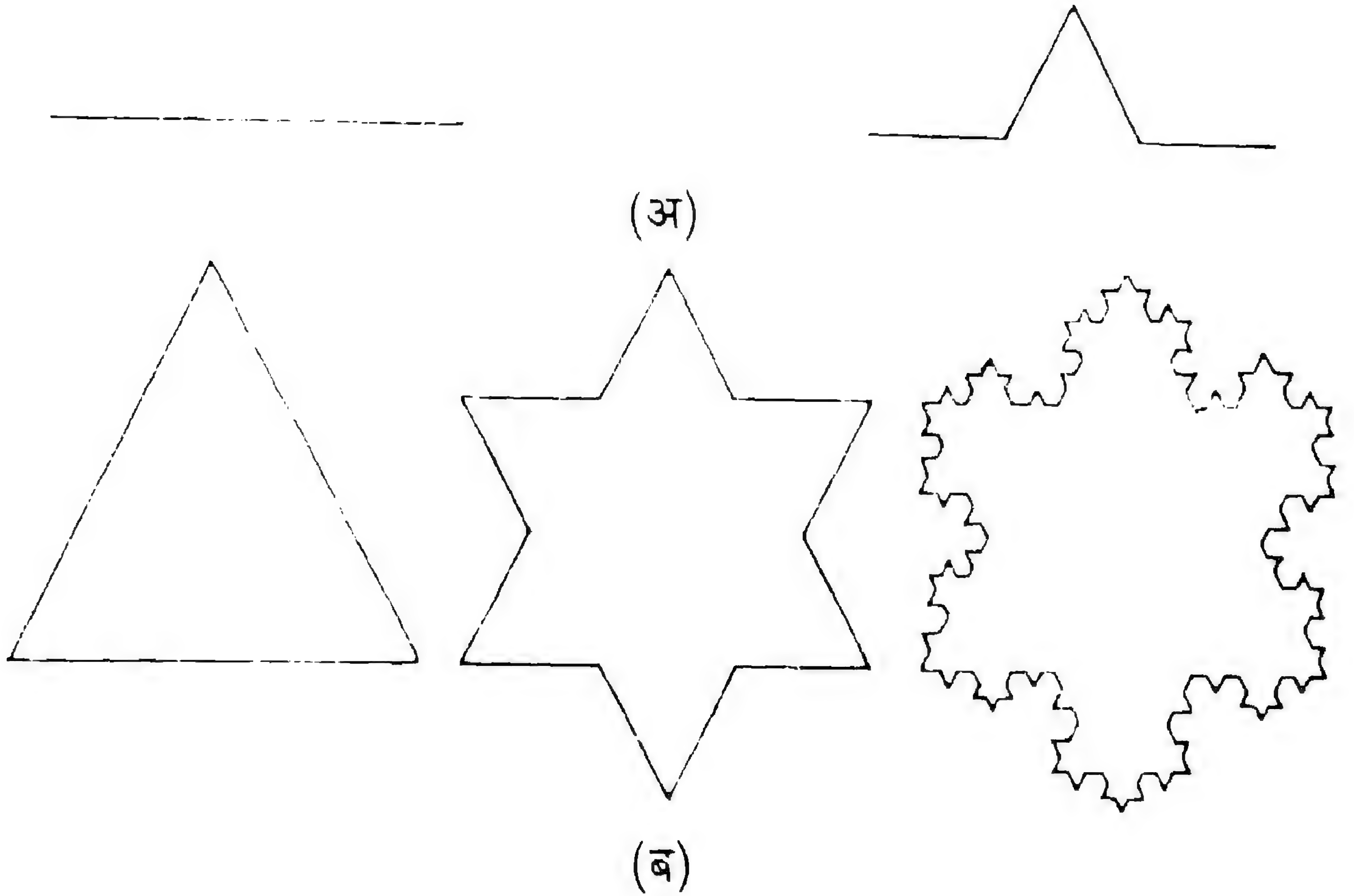
समरूपता असणारे नैसर्गिक आकार निर्माण करतात. अर्थात सर्वच प्रक्रिया काही मापप्रमाण निश्चल नसतात. भूशास्त्रात उष्णतेच्या अभिसरणामुळे घडून येणाऱ्या प्रक्रिया यात मोडतात - त्यात विशिष्ट लांबी व कालांतर अंगभूत असते व त्यामुळे त्या क्रिया अपूर्णमित नसल्याची लक्षणे दाखवितात. भरीस म्हणजे जेथे स्वयं-समरूपता असते तेथेही ती अदमासे व सांख्यिकी स्वरूपाची असते. शिवाय स्वयं-समरूपता वा मापप्रमाण निश्चलता बऱ्याच विस्तृत प्रांतात लागू पडत असली तरी तो प्रांत मर्यादितच असतो -- साधारणपणे दगडातील कणाच्या आकारापासून (मिलीमीटर लांबी) ते एखाद्या देशाच्या आकारापर्यंत (10^3 वा 10^4 किलोमीटर लांबी) हा विस्तार असू शकतो. देशाची किनारपट्टी वा दुसरा एखादा नैसर्गिक आकार हा या प्रकारे एक अदमासे, सांख्यिकी अपूर्णमित असतो. परंतु अपूर्णमित नीट समजून घेण्यासाठी या प्रत्यक्षातील मर्यादा बाजूला ठेवून अदमासे नसलेले, निश्चित असे स्वयं-समरूप आकार विचारात घेऊन त्यांच्या अपूर्णमितांची किंमत काढणेच उत्तम व सोयीचे.

या प्रकरणाचा विषय संदर्भ 21 मध्ये विस्तृतपणे आहे. तसेच संदर्भ 5 पण पाहावा.

नऊ

हिमपर्णे व लादीचे तुकडे

अपूर्णमित वक्राचे वारंवार दिले जाणारे उदाहरण म्हणजे या शतकाच्या प्रारंभी फॉन कॉख याने शोधून काढलेला हिमपर्ण-सदृश आकार. समभुज त्रिकोणावर एका साध्या रूपांतराची पुनरावृत्ती करून मिळविलेली ही स्वयं-समरूप भूमितीय चीज. या रूपांतरात त्रिकोणाच्या बाजूचे तीन भाग करून त्यातील मधला भाग काढून टाकून त्यावर समभुज त्रिकोण रचला जातो. (आकृती 9.1-अ). पहिल्या पायरीत मूळच्या समभुज त्रिकोणाचे रूपांतर ख्रिश्चन धर्मीयांच्या डेव्हिडच्या ताऱ्यात होते (आकृती 9.1-ब). अधिक पुनरावृत्ती केल्यावर आकृती 9.1(ब)मध्ये अखेरीस दाखविल्यासारखे आकार हाती



आकृती 9.1 (अ) : कॉख हिमपर्ण तयार करण्यासाठी वापरायचे मूलभूत रूपांतर; (ब) : समभुज त्रिकोणापासून रूपांतराच्या पहिल्या व तिसऱ्या पायरीवर मिळणारे आकार.

येतात. कॉखचे हिमपर्ण म्हणजे हे रूपांतर अनंत वेळा केल्यानंतर मिळणारे या आकाराचे अंतिम स्वरूप.

एका दृष्टीने कॉखचा वक्र ही एक गणितीय विकृती म्हणावी लागेल. लंबवर्तुळ वा पॅराबोला यासारखा कोणताही सफाईदार वक्र सलग अखंड असून त्याच्या प्रत्येक बिंदूवरील चढावाची किंमत निश्चित असते. कॉखचा वक्र मात्र सर्वत्र सलग, अखंड असूनही कोणत्याही बिंदूशी त्याला निश्चित किमतीचा चढाव असत नाही. दुसऱ्या दृष्टीने बघितले तर हा वक्र म्हणजे साक्षात साधेपणाचा अवतार भासतो. प्रत्येक मापप्रमाणावर तो स्वयं-समरूप आहे. आकृती 9.1(ब) मधील एक छोटा भाग विचारात घ्या, तो त्याच्या आधीच्या पायरीवरील वक्राच्या मोठ्या भागाप्रमाणेच आढळून येतो. *एकाच* रूपांतराची पुनरावृत्ती केल्याने ही स्वयं-समरूपता निर्माण झाली आहे हे उघडच आहे.

कॉख वक्राची लांबी किती? मूलभूत रूपांतर एका पायरीत लांबी चार-तृतीयांशाने वाढवते. प्रारंभीच्या समभुज त्रिकोणाची परिमिती समजा 3 धरली, तर मग डेव्हिडच्या ताऱ्याची परिमिती होते $(4/3) \times 3 = 4$. पुनरावृत्तीच्या 'n' पायऱ्यांनंतर या वक्राची लांबी होते $(4/3)^n \times 3$. म्हणजेच या प्रकारे वक्राची लांबी अमर्याद वाढत जाते. कॉख वक्राची लांबी अनंत आहे. आणि हे कोड्यात पाडणारे आहे. हा वक्र पृष्ठभागाच्या सान्त, मर्यादित भागावर पसरलेला आहे. तसे पाहता मूळ त्रिकोणाला आत सामावून घेणाऱ्या वर्तुळाच्या क्षेत्रफळापेक्षाही या वक्राचे क्षेत्रफळ कमीच आहे. मर्यादित क्षेत्रफळ असणाऱ्या कोणत्याही सर्वसाधारण सफाईदार वक्राची लांबीही मर्यादित असणे अपेक्षित आहे. मग कॉख वक्र मात्र पृष्ठभागावर अनंतापर्यंत न पसरता लांबी अमर्यादित कशी ठेवू शकतो? या प्रश्नाचे उत्तर वेगवेगळ्या मापप्रमाणात दिसून येणाऱ्या या वक्राच्या स्वयं-समरूपतेत दडलेले आहे. यामुळे हा वक्र अमर्यादित खाचाखोचा व नागमोडी वळणांनी भरला जाऊन अनंतापर्यंत न पसरताही त्याची लांबी अनंत होते.

या वक्राची लांबी कशा प्रकारे अनंताकडे झेपावते ते आपण पाहू या. प्रत्येक पुनरावृत्तीबरोबर वक्राच्या प्रत्येक रेषाखंडाची लांबी एकतृतीयांश होते. रेषाखंडांची संख्या जर तिपटीने वाढली असती तर वक्राची एकूण लांबी मर्यादित राहिली असती. परंतु प्रत्येक पुनरावृत्तीबरोबर रेषाखंडांची संख्या 3 पट न होता 4 पट होते. यामुळेच वक्राची एकूण लांबी अमर्याद वाढत जाते.

तक्ता 1

कॉख वक्राच्या मार्गावरील पहिल्या तीन पायऱ्या

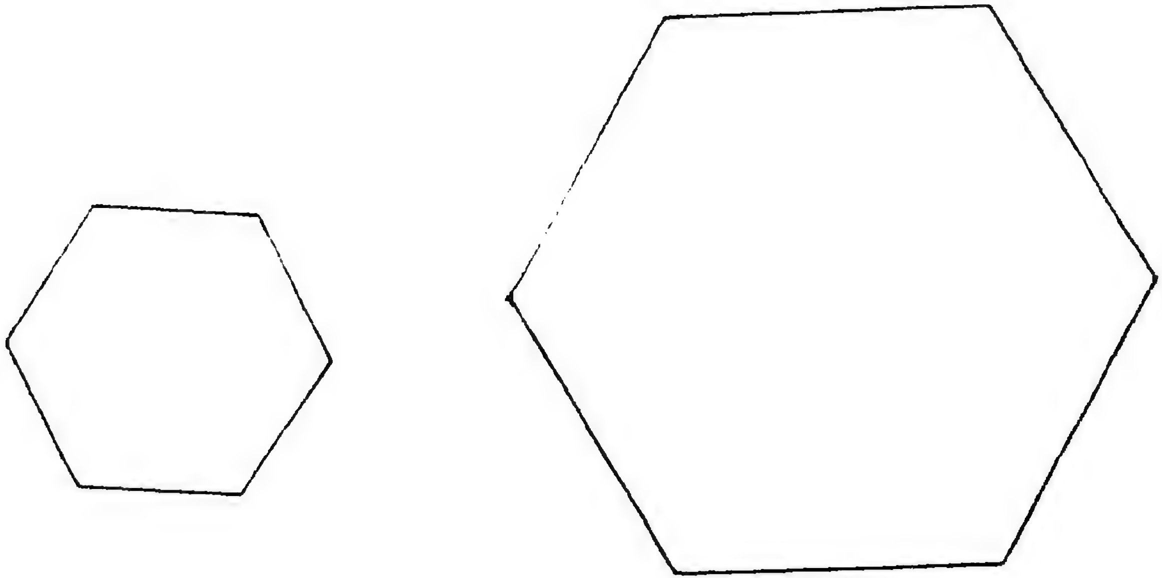
पायरी	*रेषाखंडाची लांबी*	*रेषाखंडांची संख्या*	*एकूण लांबी*
n=0	$l_0=1$	$N_0=3$	$L_0=N_0 \times l_0=3$
n=1	$l_1=1/3$	$N_1=12$	$L_1=N_1 \times l_1=4$
n=2	$l_2=1/9$	$N_2=48$	$L_2=N_2 \times l_2=16/3$

म्हणजे n व्या पायरीवर, $l_n = 1/3^n$ आणि $N_n = 3 \times (4)^n$. आता वस्तूची अपूर्णमिती (D) ही रेषाखंडांची संख्या N आणि प्रत्येक रेषाखंडाची लांबी l यांच्यातील संबंधावर अवलंबून असते. Dची किंमत काढण्यासाठी $N \propto 1/l^D$ हा Dची व्याख्या करणारा संबंध अधिक सोयीस्कर रूपात असा मांडता येतो :

$$D = \frac{\text{Log}\,(N_{n+1}/N_n)}{\text{Log}\,(l_n/l_{n+1})}$$

प्रत्येक पायरीवर N ही संख्या चार पटीने वाढते, तर l ही लांबी तीनपट कमी होते. त्यामुळे D = (log 4)/(log 3) = 1.26 (जवळपास). म्हणजे कॉख वक्र हा 1 आणि 2 यामधील अपूर्णांक मिती असलेला अपूर्णमित आहे.

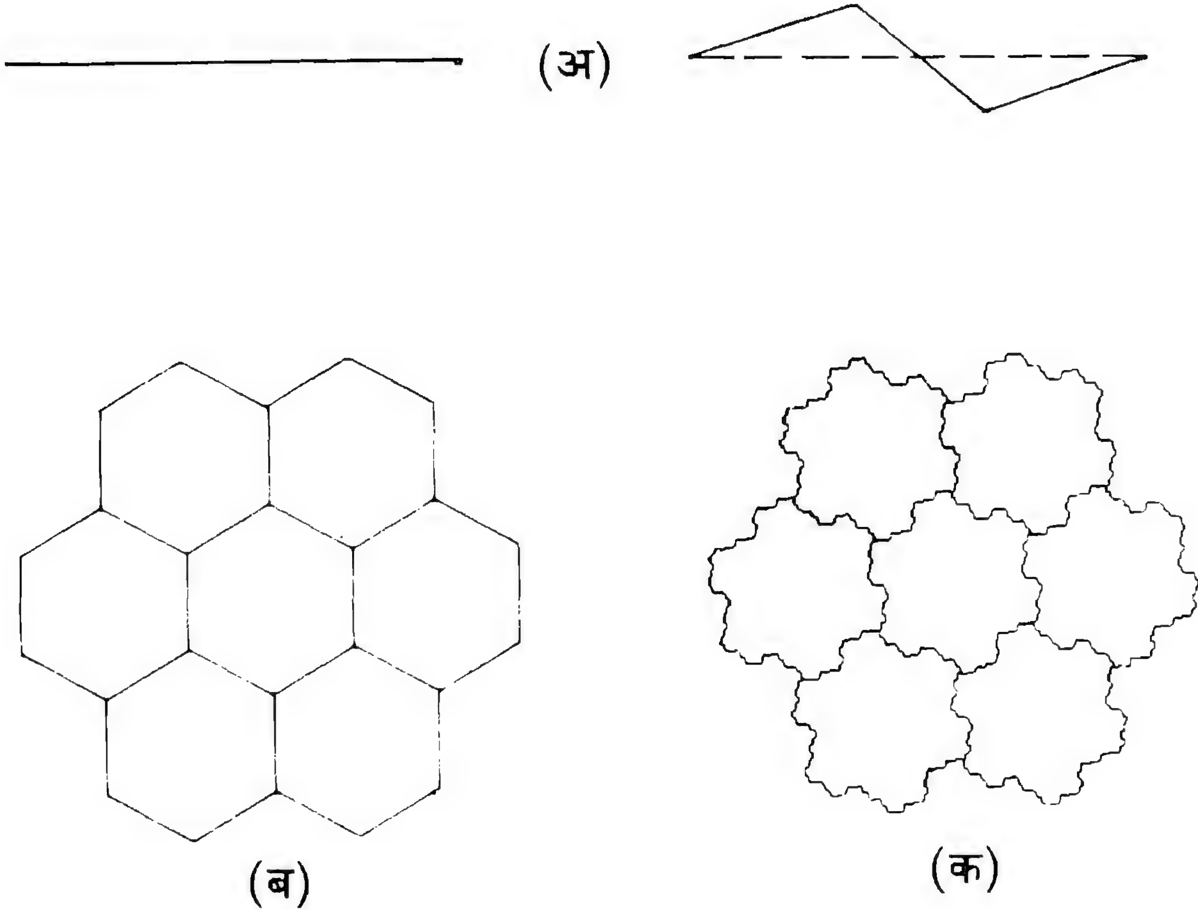
कोणत्याही साधारण सफाईदार वक्राची मिती असते 1, आणि कोणत्याही साधारण क्षेत्राची मिती असते 2. कॉख वक्राची मिती अशी या दोन संख्यांच्या दरम्यान येण्याचे कारण काय? फार काटेकोरपणा न बाळगता बोलायचे तर म्हणता येईल की प्रतलावरील म्हणजे पृष्ठभागावरील उपलब्ध जागेचा वापर करण्यात सफाईदार वक्रापेक्षा कॉख वक्र अधिक 'कार्यक्षम' आहे, कारण प्रतलाच्या मर्यादित क्षेत्रात अमर्याद, अनंत लांबी तो माववू शकतो. कॉख वक्र येथे अधिक कार्यक्षम ठरणाऱ्या क्षेत्राचे अनुकरण करू बघतो. या प्रकारच्या कारणमीमांसेत काटेकोरपणाचा अभाव असला तरी त्यातून एक प्रश्न सहज पुढे येतो : वक्राचे असे एखादे रूपांतर शोधणे शक्य आहे का की ज्याच्या अनंत पुनरावृत्तींनंतर तो वक्र पूर्ण क्षेत्र व्यापून टाकेल? आश्चर्याची गोष्ट म्हणजे हे शक्य आहे. 'हिल्बर्ट वक्र' म्हणून ओळखल्या जाणाऱ्या स्वयं-समरूप वक्राची मिती 2 आहे. जिज्ञासू वाचकांनी अधिक तपशिलासाठी संदर्भ 21 पाहावा.



आकृती 9.2 : दोन समरूप (नियमित) षटकोन. मोठ्या व लहान क्षेत्रफळाचे गुणोत्तर आहे 4 दोन परिमितींच्या गुणोत्तराच्या वर्गाइतके.

अपूर्णमितांच्या प्रवेशानंतर शालेय भूमितीतील सहजपणे वापरले जाणारे काही नियम काळजीपूर्वक पारखून घेणे जरुरीचे झाले आहे. अशा एका नियमाप्रमाणे समरूप आकृत्यांची क्षेत्रफळे त्यांच्या परिमितींच्या वर्गांच्या प्रमाणात असतात. आकृती 9.2 मध्ये दोन समरूप (नियमित) षटकोन दाखविले आहेत. लहान षटकोनाच्या प्रत्येक बाजूची लांबी एक मानली असून मोठ्या षटकोनाची प्रत्येक बाजू दोन आहे. मोठ्या षटकोनाचे क्षेत्रफळ $6\sqrt{3}$ असून लहानाचे $3\sqrt{3/4}$ इतके आहे. या दोन क्षेत्रफळांचे गुणोत्तर आहे 4. अपेक्षेप्रमाणेच ते दोन परिमितींच्या गुणोत्तराच्या वर्गाइतके आहे.

आता सात नियमित षटकोनी लाद्यांपासून केलेली, आकृती 9.3 मध्ये दाखविलेली, रचना पाहा. प्रत्येक षटकोनाच्या बाजूची लांबी एक धरा. षटकोनाच्या प्रत्येक बाजूचे रूपांतर तीन समान रेषाखंडांच्या रचनेत अशा प्रकारे करा की दोन रेषाखंडांतील कोन 120 असेल. (आकृती 9.3-अ) या रचनेत प्रत्येक रेषाखंडाची लांबी $1/\sqrt{7}$ असल्याचे दाखविता येते. या रूपांतराची पुनरावृत्ती केल्यावर आकृती 9.3-क मध्ये अदमासे दाखविल्याप्रमाणे अपूर्णमित लाद्या तयार होतात. अंतिमतः या अपूर्णमित लाद्यांची जोडणी



आकृती 9.3 : (अ) अपूर्णमित लाद्या करण्यासाठीचे मूलभूत रूपांतर; (ब) सात षटकोनांच्या जुळणीची प्रारंभीची आकृती; (क) अपूर्णमित लाद्यांचा अदमासे आकार.

स्वयंसमरूप होते. बाह्य वक्राचा आकार त्यात सामावलेल्या सात अपूर्णमित लाद्यांपैकी प्रत्येक लादीच्या आकाराशी तंतोतंत जुळतो. समरूप आकृत्यांच्या क्षेत्रफळांना लागू पडणारे नेहमीचे नियम या समरूप अपूर्णमितांना पण लागू पडतात का?

आकृती 9.3 बघितल्यावर सहज लक्षात येते की बाहेरील वक्राची परिमिती प्रत्येक लादीच्या परिमितीच्या तिप्पट आहे. मात्र बाहेरील मोठ्या समरूप लादीचे क्षेत्रफळ आतील

प्रत्येक लादीच्या क्षेत्रफळाच्या फक्त सातपट आहे. समरूप आकृत्यांना लागू पडणाऱ्या नेहमीच्या नियमानुसार बाहेरील आकृतीचे क्षेत्रफळ नऊपट असायला हवे. म्हणजे तो नियम येथे अपूर्णमित लाद्यांना लागू पडत नाही. अपूर्णमितांसाठी तो नियम बदलला पाहिजे. क्षेत्रफळ परिमितीच्या वर्गाच्या प्रमाणात बदलत नाही; 2 या घातांकाऐवजी 2/D हा घातांक येतो. येथे D म्हणजे बाहेरील वक्राची अपूर्णमितीय किंमत. येथील उदाहरणात D ची किंमत $(\log 3)/(\log\sqrt{7}) = 1.13$ (जवळपास) इतकी येते. म्हणजे येथे क्षेत्रफळाचा परिमितीशी संबंध $(\text{परिमिती})^2$ असा नसून $(\text{परिमिती})^{2/1.13}$ असा असतो. परिमिती तिप्पट वाढली तर क्षेत्रफळ नऊपट न होता $(3)^{2/1.13}$ या पटीत वाढते. याची किंमत साधारणपणे 7 आहे. अशा प्रकारे लादीची अपूर्णमिती योग्य प्रकारे वापरून आपण सुसंगती टिकवून ठेवू शकतो. अपूर्णमितांच्या अनोख्या, विलक्षण अपूर्णांकीय मिती जर आपण गंभीरपणे स्वीकारल्या तर युक्लिडीय भूमिती अपूर्णमितांसाठीही काटेकोरपणे लागू पडते, असे म्हणता येईल!

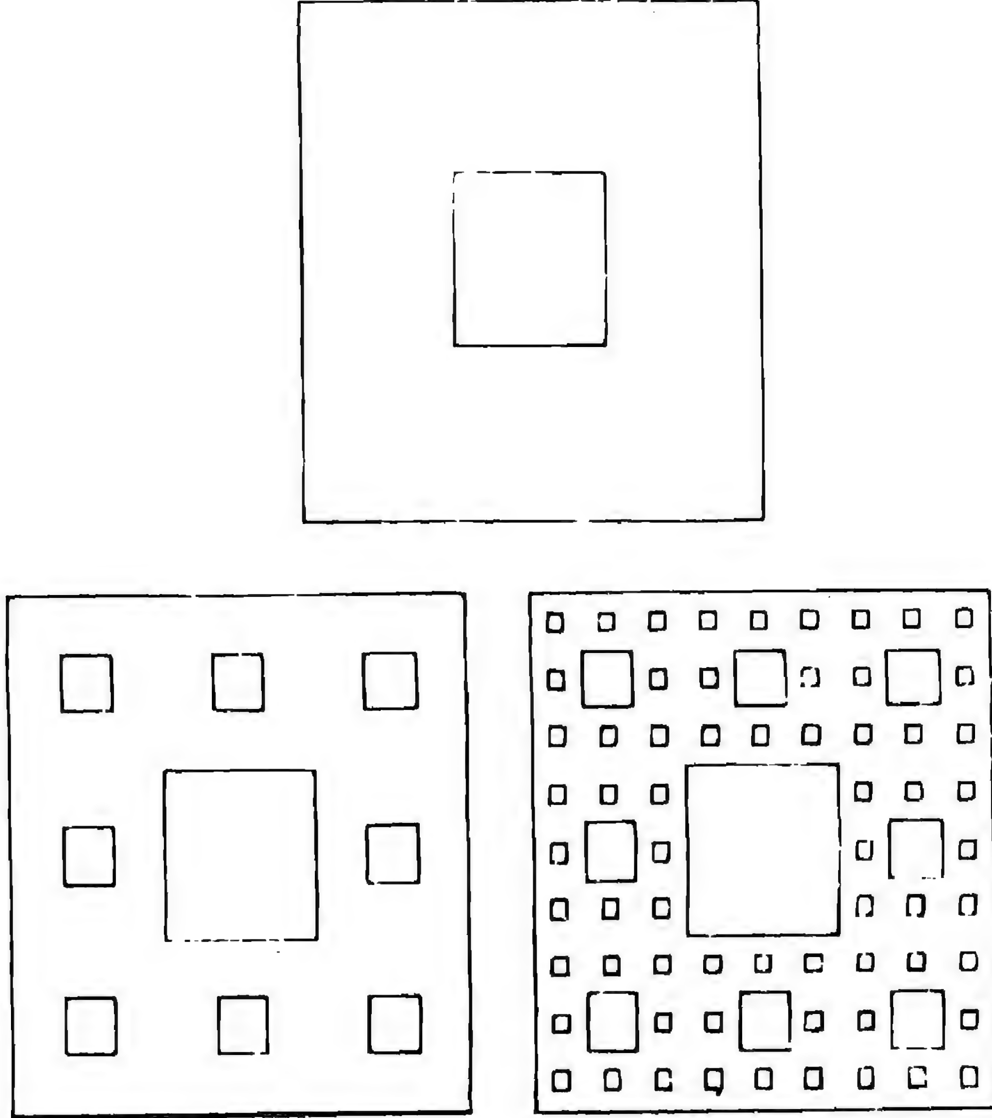
अपूर्णमित लाद्यांवरील विवेचन संदर्भ 21 वर आधारित.

दहा

सच्छिद्र गालिचे व स्पंजासारखे पेटारे

योग्य अशा रूपांतराची पुनरावृत्ती घडवून आणली की स्वयं-समरूपता व अपूर्णमित यांची निर्मिती होते. कॉखच्या हिमपर्णात पुनरावृत्तीमुळे लांबी वाढवली जाते. आपण याउलटही करू शकतो : एखाद्या वस्तूतून काही भाग काढून टाकण्याची पुनरावृत्ती. असे केल्यावर अगदी आगळेवेगळे गालिचे, गॅस्केटस् (गळपट्टे) व पेटारे तयार होतात.

अपूर्णमित गालिचा तयार करण्यास एका चौरस गालिच्यापासून सुरुवात करा. याच्या बाजूची लांबी एक धरा. या चौरसाचे नऊ सारख्या भागांत विभाजन करून मधला भाग



आकृती 10.1 : सिएरपिन्स्की गालिचा तयार करण्याच्या क्रियेतील पहिल्या तीन पायऱ्या. या गालिच्याची कडा अनंत लांबीची असून तो जमिनीचे क्षेत्र अजिबात व्यापत नाही.

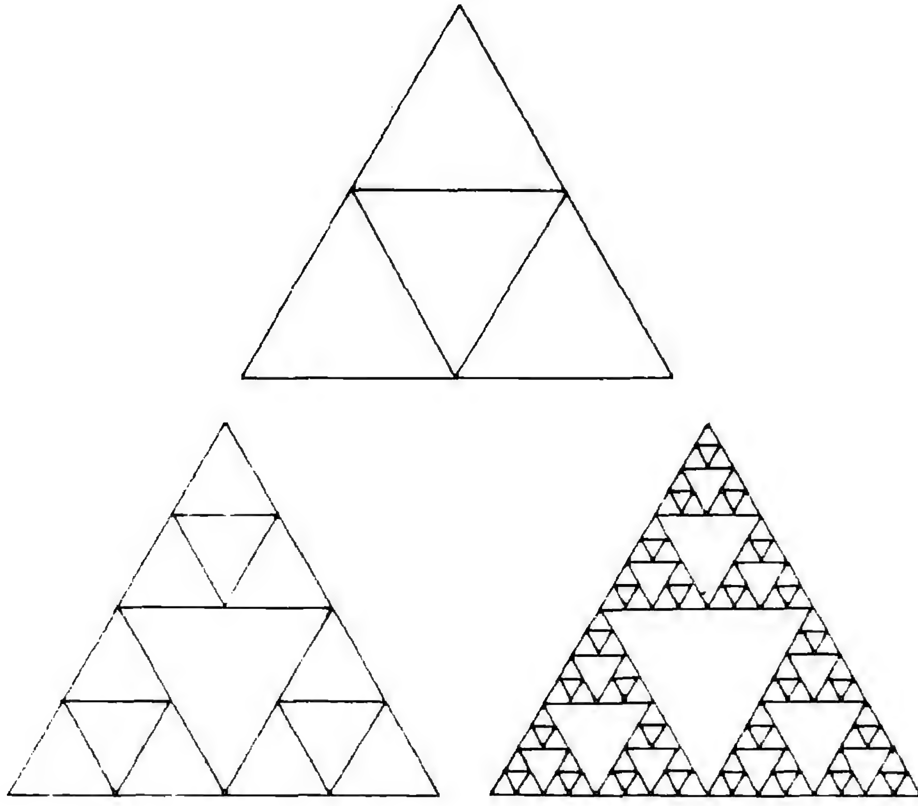
काढून टाका. (आकृती 10.1). हे मूलभूत रूपांतर झाले. हे रूपांतर मग उरलेल्या आठ चौरसांवर करा. याची अनंत वेळा पुनरावृत्ती केल्यावर जी स्वयं-समरूप वस्तू तयार होते तिला नाव दिले गेले आहे सिएरपिन्स्की गालिचा.

या गालिच्याची मिती निश्चित करण्यासाठी पूर्वी कॉख हिमपर्णावेळी वापरलेली कार्यप्रणालीच वापरा. जसजशी छोट्या चौरसांची बाजू लहान होत जाते तसतशी त्यांची संख्या वाढत जाते. अगदी प्रारंभीची पायरी म्हणजे n=0, त्यावेळी लांबी l_0=1 आणि चौरसांची संख्या N_0=1. पहिले रूपांतर (n=1) - त्याच्या परिणामी छोट्या चौरसांची लांबी होते l_1=1/3 व संख्या होते N_1=8. दुसरे रूपांतर n=2, त्या वेळी l_2=1/9 व N_2=64. चौरसाची बाजू एक तृतीयांश होते तेव्हा चौरसांची संख्या एरवीच्या छिद्रे नसलेल्या गालिच्यात वाढावी तशी नऊ पटीने न वाढता फक्त आठपटीनेच वाढते. म्हणजे सामान्य गालिच्याप्रमाणे सिएरपिन्स्की गालिच्याची मिती 2 असणार नाही हे उघडच आहे. ती 2 पेक्षा कमी असली पाहिजे. मितीच्या व्याख्येच्या सूत्रानुसार, D = (log 8)/(log 3) = 1.89 (जवळपास).

या विचित्र गालिच्याचे क्षेत्रफळ किती? पुनरावृत्तीच्या प्रत्येक पायरीला क्षेत्रफळ कमी होऊन आठ-नवमांश (8/9) होते. म्हणजे n पायऱ्यांनंतर क्षेत्रफळ असणार $(8/9)^n$. जसजशी n ची किंमत अनंताकडे सरकू लागते तसतसे क्षेत्रफळ शून्याजवळ पोहोचू लागते. म्हणजे हा अनंत छिद्रे असलेला गालिचा अजिबात काही क्षेत्र व्यापत नाही! आणि या गालिच्याच्या कडेची एकूण लांबी किती? प्रारंभी या चौरसाची परिमिती आहे 4. रूपांतराच्या पहिल्या पायरीनंतर कडांची लांबी होते 4+(4/3). दुसऱ्या पायरीवर n=2, ही लांबी होते 4+(4/3)+(32/9). प्रत्येक पायरीवर ही लांबी वाढतच जाते, कोणत्याही मर्यादेशिवाय. म्हणजे सिएरपिन्स्की गालिच्याची कडा अनंत लांबीची असूनही तिच्या आत सामावलेले क्षेत्रफळ शून्य असते.

छिद्रे पाडण्याचा हा विध्वंसक (खरे म्हणजे सर्जनशील) खेळ केवळ चौरस गालिच्यांपुरताच मर्यादित ठेवण्याची गरज नाही. आकृती 10.2 मध्ये याच प्रकारची प्रक्रिया त्रिकोणावर केलेली आहे. पुनरावृत्तीच्या प्रत्येक पायरीवर आतील त्रिकोणाची बाजू निम्मी होते, म्हणजे 2 पटीने कमी होते. परंतु या छोट्या त्रिकोणांची संख्या मात्र 4 पटीऐवजी 3 पटीनेच वाढते. सिएरपिन्स्की गॅस्केट या नावाने ओळखल्या जाणाऱ्या या स्वयं-समरूप वस्तूची मिती आहे; (log3/log2)=1.58 (जवळपास). या गॅस्केटच्या कडांकडे नजर टाकल्यास लक्षात येते की प्रत्येक रेषाखंडाची लांबी निम्मी झाली की एकूण कडांची संख्या तिपटीने वाढते. याचा अर्थ गॅस्केटच्या कडांच्या अपूर्णमिताची मिती गॅस्केटच्या क्षेत्रफळाच्या मितीएवढीच आहे. येथे आपण एका आश्चर्यकारक गोष्टीला सामोरे येतो - सिएरपिन्स्की गॅस्केटच्या बाबत क्षेत्रफळ कडांच्या लांबीच्या वर्गाच्या प्रमाणात नव्हे, तर फक्त लांबीच्या प्रमाणात असते.

त्रिमिती वस्तूंच्या बाबतही याच प्रकारची रूपांतरे करता येतात. उदाहरणार्थ त्रिकोणाऐवजी एक नियमित चतु:पृष्ठक (regular tetrahedron) घ्या. याच्या बाजूंच्या निम्मी लांबी असलेला अष्टपृष्ठक त्यातून कापून काढा. आपल्याकडे आता चार चतु:पृष्ठक होतात.

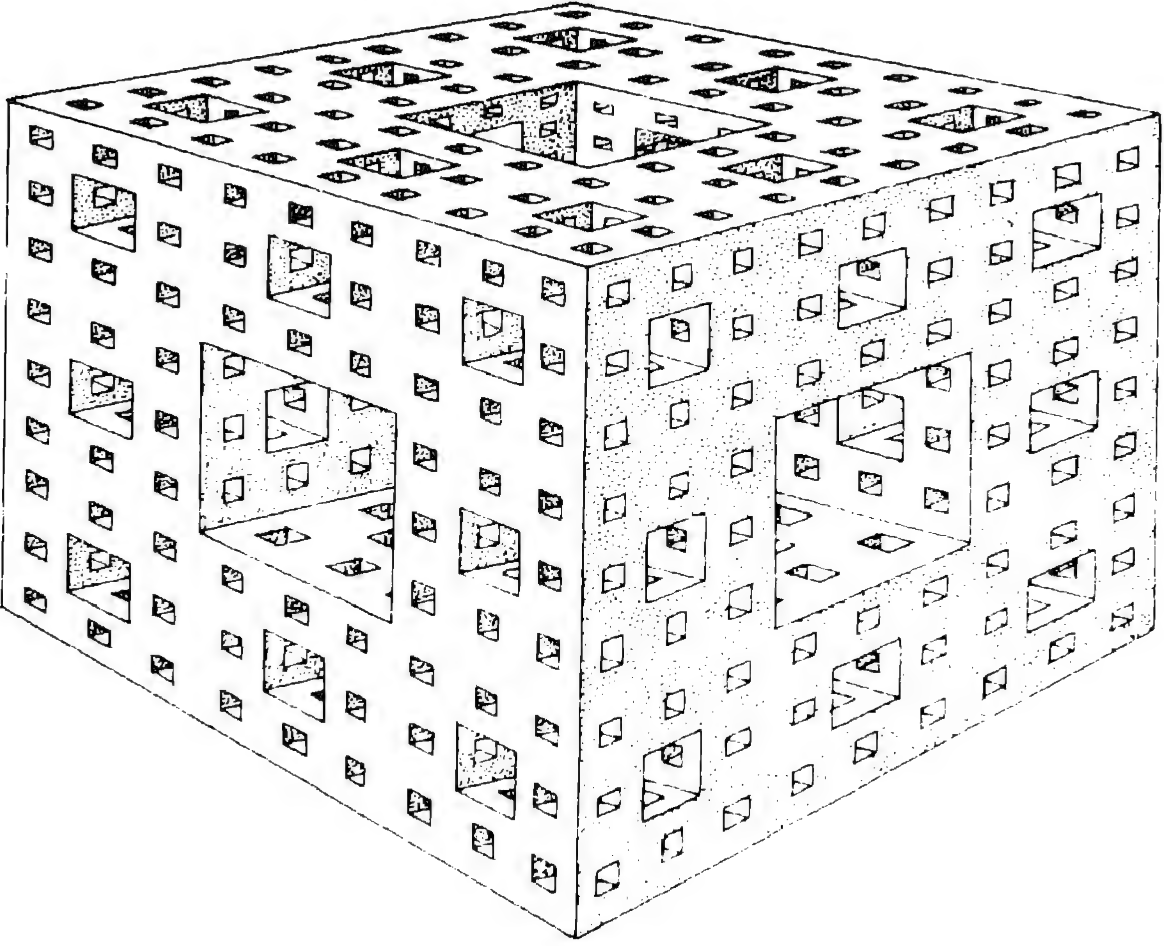


आकृती 10.2 : सिएरपिन्स्की गॅस्केट तयार करण्याच्या क्रियेतील पायऱ्या. गॅस्केटचे क्षेत्रफळ व त्याच्या कडांची लांबी या दोहोंची अपूर्णांक मिती सारखीच 1.58 आहे. सर्वसाधारण युक्लिडीय आकारांत हे कधीच आढळत नाही.

त्यांच्यावर हेच रूपांतर पुन्हा पुन्हा करत राहा. सर्वसाधारण त्रिमिती वस्तूबाबत लांबी निम्मी केल्यास छोट्या आकारांची संख्या 8 पटीने वाढते. येथे मात्र रेषाखंड निम्मा केल्यावर चतु:पृष्ठक संख्या फक्त 4 पटीनेच वाढते. म्हणजे या प्रकारच्या सिएरपिन्स्की गॅस्केटची मिती आहे; (log4/log2)=2; ज्या घन अवकाशात हे गॅस्केट रुतलेले आहे त्याच्या मितीपेक्षा 1 ने कमी. यावरून हे दिसून येते की अपूर्णमितांची मिती प्रत्येक उदाहरणात अपूर्णांकी असण्याची गरज नाही. काही अपूर्णमितांच्या मिती पूर्णांकात असतात. मात्र याचा अर्थ असा नव्हे की त्या वस्तू नेहमीच्या वक्र व पृष्ठांसारख्याच असतात.

सिएरपिन्स्की गालिच्यासारखी त्रिमितीतील रचना मेंगरचा स्पंज म्हणून ओळखली जाते (आकृती 10.3). येथे लांबी 1 असणाऱ्या घनापासून प्रारंभ करा. प्रत्येक बाजू एकतृतीयांश असणारे 27 छोटे घन यात तयार होतात. यातील केंद्रस्थानीचा व मूळ घनाच्या सहा पृष्ठभागांवरील मधले असे सात घन काढून टाका. उरलेल्या 20 घनांवर पुन्हा हेच रूपांतर करा, व त्याची अनंत वेळा पुनरावृत्ती करा. प्रत्येक पायरीवर घनाची लांबी एक-तृतीयांश होते, तर घनांची संख्या 20 पट वाढते. म्हणजे मेंगर स्पंजाची मिती येते (log 20)/(log 3) = 2.73 (जवळपास). प्रत्येक पायरीवर आकारमान 20/27 या प्रमाणात घटते. म्हणजे अंतिमत: मेंगर स्पंजाचे आकारमान शून्य होते. परंतु पुनरावृत्तीच्या प्रत्येक पायरीवर अधिक पृष्ठभाग निर्माण होतात व अखेरीस त्यांच्या क्षेत्रफळांची बेरीज अनंत होते. मेंगर स्पंजाच्या पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ अमर्याद असून त्यात सामावलेले आकारमान मात्र शून्य असते.

या चित्रविचित्र आकारांचा व्यवहारात काही उपयोग आहे का? याचे उत्तर होकारार्थी आहे. कधीकधी एखाद्या समाजात महत्त्वाच्या कल्पना आधीपासून अस्तित्वात असतात



आकृती 10.3 : मेंगर स्पंजच्या मार्गावरील एक टप्पा. मेंगर स्पंज 2.73 मिती असलेला अपूर्णमित, याचे पृष्ठभागीय क्षेत्रफळ अनंत असून त्यातील आकारमान मात्र शून्य असते.

आणि नंतर कोणीतरी त्यांना निश्चित वैज्ञानिक संकल्पनांचे रूप देतो. मोठी पायाभरणी करण्याऐवजी खांब व तुळ्यांच्या शाखा-प्रशाखांचे जाळे तयार करून बांधकामास मजबुती आणण्याची कल्पना पॅरिसमधील विख्यात आयफेल टॉवरच्या रचनेत वापरलेली आहे. आयफेल टॉवर म्हणचे त्रिमितीय सिएरपिन्स्की गॅस्केट नाही, परंतु तो बघितल्यावर सिएरपिन्स्की गॅस्केटची आठवण निश्चितच होते. याच प्रकारे खूप सच्छिद्र माध्यमातील द्रवाच्या प्रवाही हालचालींचा अभ्यास करताना प्रतिमान म्हणून मेंगर स्पंजाचा उपयोग केला गेला आहे. निसर्गाबाबतची आकलनाच्या पलीकडे असणारी गोष्ट खरी हीच आहे. निव्वळ बौद्धिक समाधान मिळावे व अभ्यासविषयाची वाढ व्हावी या उद्देशातून लागलेले गणितातील दुर्बोध व गहन शोध जमिनीवरील व्यावहारिक संदर्भात अत्यंत उपयोगी पडत असल्याचे आढळून येते. युजिन विग्नर या महान भौतिकी वैज्ञानिकाने म्हटल्याप्रमाणे विज्ञानक्षेत्रातील गणिताची परिणामकारकता समजुतीच्या पलीकडील आहे. असे का? याचे उत्तर कोणालाच ठाऊक नाही.

वर विचारात घेतलेल्या अपूर्णमित आकारांचे तपशीलवार विवेचन संदर्भ 21 मध्ये आहे. तसेच संदर्भ 4 ही पाहा.

अकरा

अंकगणितीय धूळ व सैतानाचा जिना

कधीकधी गणित 'धूळग्रस्त' होते आणि आपल्या मन:चक्षूंची दृष्टी अस्पष्ट होऊन जाते. आकड्यांत दडलेले गुणधर्म सामान्यजनांच्या समजुतीच्या आवाक्याबाहेरचे असतात. परंतु गणितज्ज्ञांची जातच निराळी असते. 1729 हा आकडा आठवतोय? जी.एच.हार्डी या थोर इंग्रज गणितज्ज्ञालाही हा आकडा शुष्क, नीरस व धुळीने माखलेला वाटला. परंतु हार्डीचे विद्यार्थी व महान सहकारी श्रीनिवास रामानुजन यांनी ही धूळ साफ केली आणि लक्षात आणून दिले की दोन घनांची बेरीज या स्वरूपात दोन वेगळ्या प्रकारे मांडता येणारा हा सर्वांत लहान आकडा आहे ($1729 = 12^3+1^3=10^3+9^3$)

जॉर्ज कँटर हे एकोणिसाव्या शतकाच्या उत्तरार्धातील असेच एक महान गणितज्ज्ञ. सट सिद्धान्त म्हणजे गणिताची पायाभूत भाषा असून सध्या बालवाडीतील चिमुकल्यांचा गळी पण ती उतरविण्याचे प्रयत्न केले जातात. कँटर या सट सिद्धान्ताचे जनक, 'अनंत' म्हणून संबोधल्या जाणाऱ्या अस्पष्ट व निसरड्या संकल्पनेला पकडण्याचा प्रयत्न या गृहस्थांनी केला. पूर्णांकांचा सट अनंत असतो. सम पूर्णांकांचा सट हा पूर्णांकांच्या सटाचा उप-सट, तोही अनंत असतो. पूर्णांक सटाचे अनंतत्व सम-पूर्णांक सटाच्या अनंतत्वापेक्षा मोठे असते का? कँटर यांचे उत्तर होते - 'नाही! हे दोन्ही अनंत सट समतुल्य आहेत, बरोबरीचे आहेत.' एका सलग रेषेवरील बिंदूंचा सट हा सत् अंकांचा (real numbers) अनंत सट असतो. या सटाचे काय? कँटर यांनी दाखवून दिले की या सटाचे अनंतत्व हे पूर्णांक सटाच्या अनंतत्वापेक्षा वेगळे आहे. पुढे जाऊन त्यांनी तर्क मांडला की फक्त दोनच प्रकारचे अनंत सट अस्तित्वात आहेत - एक, पूर्णांक वा अपूर्णांकांचा गणनीय (गणना करता येणारा) अनंत सट; तर दुसरा सत् अंकांचा गणनीय नसलेला अनंत सट. आणि या दोहोंपलीकडे काही नाही. हेच ते कँटर यांचे प्रसिद्ध सलग विस्तार गृहीतक (continuum hypothesis). हा तर्क बराच काळ सिद्ध झाला नव्हता. अखेर गणितज्ज्ञांनी हा प्रश्न गमतीशीरपणे सोडविला : त्यांनी दाखवून दिले की हे गृहीतक खरे आहे की खोटे हे ठरविणे अशक्य आहे.

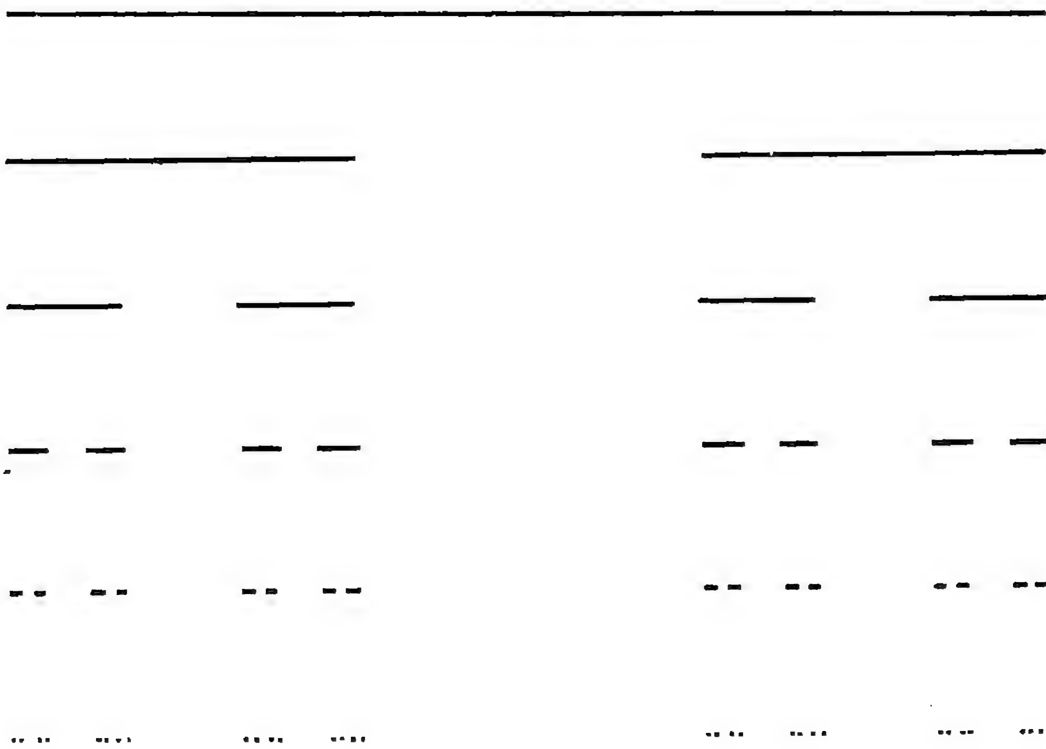
अनंत सटासंबंधित कँटर यांचे काम इतके गहन व दुर्बोध होते की त्यांच्या अनेक समकालीनांच्या दृष्टीने तो जवळजवळ वेडेपणाच होता. परंतु अशा टीकेला वा प्रवादांना दाद

न देता त्यांनी आपले काम चालू ठेवले. त्यांनी निर्माण केलेला एक अनंत सट शंभर वर्षांनंतर अपूर्णमितांच्या विषयात खूप महत्त्वाची भूमिका बजावणारा ठरला.

कँटर यांचा हा सट तयार करणे तसे सोपे आहे. एकांक लांबीचा एक रेषाखंड घ्या. त्याचे तीन समान भाग करा व मधला भाग काढून टाका. उरलेल्या दोन भागांचे पुन्हा प्रत्येकी तीन भाग करून त्यातील मधले भाग काढून टाका. या क्रियेची अनंत वेळा पुनरावृत्ती करा. अखेरीस कोणताही मर्यादित आकाराचा रेषाखंड उरणार नाही. कारण जर तसा उरला तर आपल्याला त्याचे पुन्हा विभाजन करावे लागेल. अंतिमत: मूळच्या रेषेवर उरेल तो अलग अलग बिंदूंचा संग्रह - अनंत, परंतु विरळपणे विखुरलेल्या आकड्यांचा सट. या सटाला मोठे चपखल नाव दिले गेले आहे - 'अंकगणितीय धूळ.'

आकड्यांच्या या 'धुळीचे' गुणधर्म फारच आश्चर्यकारक आहेत. एक म्हणजे अतिशय विरळ असूनही हा एक *गणनीय नसलेला* अनंत सट आहे. या अर्थी हा सट सत् अंकांच्या सलग सटासारखा आहे. परंतु त्याच्या विरळपणामुळे त्याचे माप म्हणजे एकूण लांबी भरते शून्य. त्या अर्थी हा सट पूर्णांक वा अपरिमेय अंकांच्या (rational numbers) पृथक सटासारखा आहे. पण आपल्या दृष्टीने महत्त्वाचा आहे या सटाचा आणखी एक मूलभूत गुणधर्म. हा सट सर्व मापप्रमाणांत स्वयं-समरूपता असणारा आहे. आकृती 11.1 च्या तिसऱ्या पायरीचा डावीकडचा भाग पाहा. तो दुसऱ्या पायरीवरील संपूर्ण सटाशी हुबेहूब जुळणारा आहे. आणि हीच समरूपता पुढील सर्व लागोपाठच्या पायऱ्यांवरही आढळून येते. मितीची संकल्पना स्वयं-समरूपतेशी जोडलेली आहे हे आपण या आधी अनेक उदाहरणांत पाहिलेलेच आहे. तर आता प्रश्न असा की या 'अंकगणितीय धुळीची मिती किती?

यासाठी रेषाखंडांच्या लांबीप्रमाणे रेषाखंडांची संख्या कशी बदलते ते आपल्याला बघावे लागेल. प्रत्येक पुनरावृत्तीवेळी रेषाखंडांची लांबी 3 पटीने कमी होते, आणि



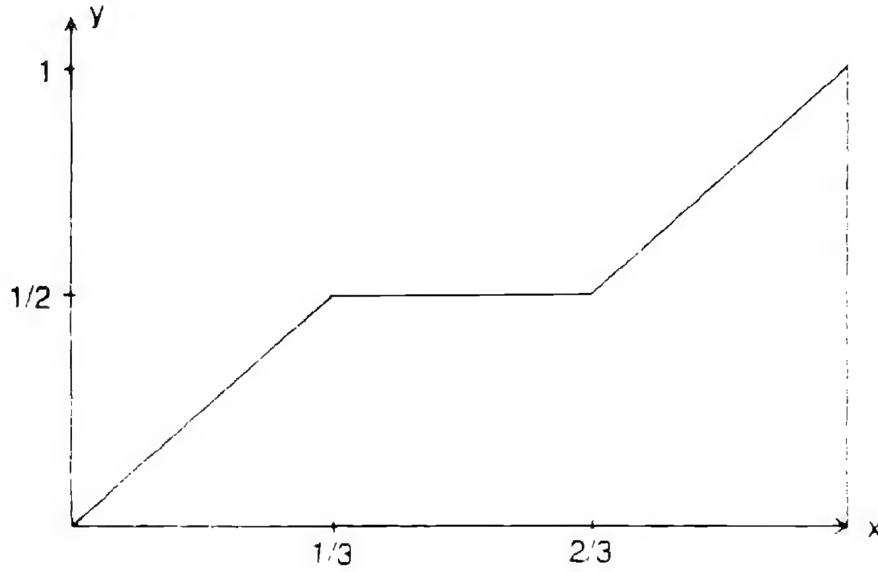
आकृती 11.1 : एका रेषेचे आत्यंतिक विरळ, स्वयं-समरूप 'अंकगणितीय धुळीत' रूपांतर.

रेषाखंडांची संख्या 2 पटीने वाढते. म्हणजे या 'धुळीची मिती होते (log 2/log 3) = 0.63 (जवळपास). म्हणजेच हा कँटर-सट एक अपूर्णमित आहे. तो पूर्णांक बिंदूंच्या सटाप्रमाणे शून्य-मितीय नाही, तसेच सलग रेषेवरील बिंदूंच्या सटाप्रमाणे एक-मितीय पण नाही. तो या दोहोंच्या मध्ये बसणारा आहे.

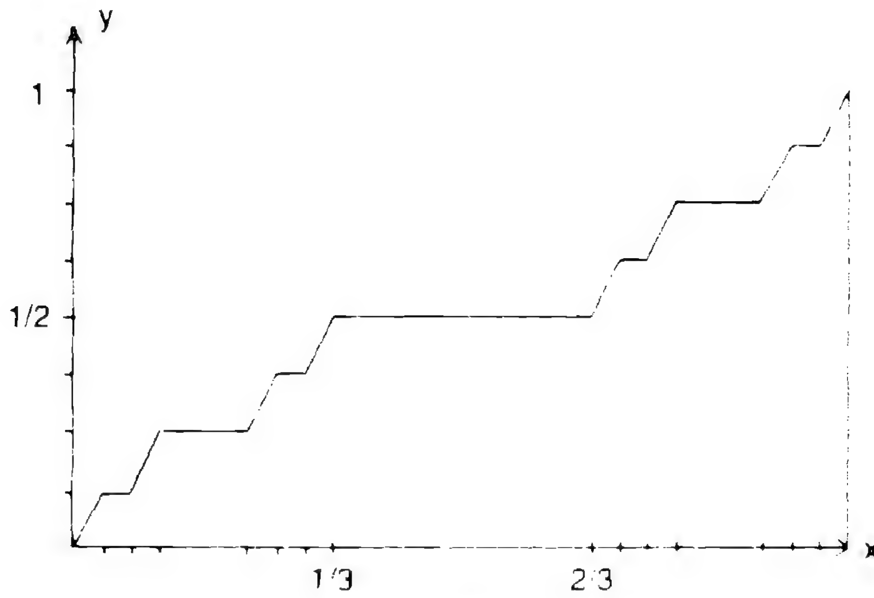
पण हा तऱ्हेवाईक सट निव्वळ एक गणितातील गंमत नाही. अनेकविध संदर्भांत तो प्रत्यक्षात आढळून येतो. मॅन्डेलब्रॉटना त्यांच्या संशोधनात एका अगदी अनपेक्षित जागी हा सट सामोरा आला : संगणकांना जोडणाऱ्या दूरध्वनीच्या तारांमधून संदेश पाठविताना होणाऱ्या चुकांच्या संदर्भात. संदेशवहन अभियंत्यांना असे आढळून आले होते की चुका होण्यामागील संहतीसंबंधी सर्व कारणे दूर केली तरी काही चुका शिल्लक राहूनच जातात. या चुका वरवर तरी स्वैर स्वरूपाच्या होत्या. त्यांच्यात कोणतीही नियमितता वा आवर्तने आढळून येत नव्हती. आणि या चुका खंडित पुंजक्यांच्या स्वरूपात आढळत होत्या चुकांच्या दोन पुंजक्यांच्या मधील कालावधीत एकही चूक आढळत नव्हती. नेहमीच्या विचारपद्धतीनुसार अभियंते याची कारणे व्यामिश्र, स्वैर अशा बाह्य व्यत्ययांत शोधत होते. या वरवर स्वैर वाटणाऱ्या गोंगाटामागे एक वेगळ्याच प्रकारची आश्चर्यकारक नियमितता दडलेली असेल अशी शंकासुद्धा कोणाला आली नाही. चुकांबद्दल संकलित केलेल्या माहितीचे विश्लेषण केल्यावर मॅन्डेलब्रॉटच्या लक्षात आले की चुकांचा अनुक्रम वेगवेगळ्या कालमापनप्रमाणांत स्वयं-समरूपता दाखवत होता. याचा अर्थ चुकांच्या अनुक्रमाची रचना 30 मिनिटांच्या मापप्रमाणात होती तशीच ती 10 मिनिटांच्या मापप्रमाणातही आढळत होती. आणि त्याहून अधिक लहान असे 3 मिनिटांचे मापप्रमाण घेतले तर तेथेही तीच रचना नजरेस येत होती. मोठ्या कालमापप्रमाणात चुकांच्या दोन पुंजक्यांदरम्यान जसा चूकविरहित कालावधी होता तसाच प्रकार छोट्या कालमापप्रमाणातही दृष्टीस पडत होता - चुकांच्या दोन पुंजक्यांदरम्यान नेहमीच चूकविरहित कालखंड असायचा. मॅन्डेलब्रॉटच्या लक्षात आले की हा गोंगाट म्हणजे कालमितीत आढळून येणारी अंकगणितीय धूळच होती. एकदा ही गोष्ट लक्षात आल्यावर गोंगाटावर मात करण्यासाठी वेगळी व्यूहरचना करायला पाहिजे हे संदेशवहन अभियंत्यांना कळून चुकले, तोपर्यंत गोंगाटावर मात करण्यासाठी संदेश अधिक शक्तिशाली करण्यावरच भर होता. आता आपण नेहमीच्या व्यवहारात इतरांशी बोलता-लिहिताना आपल्याला अभिप्रेत अर्थ शक्यतो अचूक दुसऱ्यांपर्यंत पोहोचावा म्हणून जी युक्ती वापरतो, तिचेच अनुकरण करण्याचे त्यांनी ठरविले : संदेशात अतिरिक्तता पेरणे, एकच गोष्ट दोनदा किंवा दोन वेगळ्या प्रकारे सांगणे.

कँटर यांचा सट हा एक मूलभूत अपूर्णमित सट आहे. अन्य सटांबरोबर त्याची जुळणी केल्यास नवीन वेधक आकार निर्माण होतात. याचे एक प्रसिद्ध उदाहरण म्हणजे 'सैतानाचा जिना.' ही सैतानी चीज आहे मूलत: एक आलेख. कँटर सटाच्या रचनेतील सरळ रेषेच्या प्रारंभापासूनचे एखाद्या बिंदूचे अंतर x माना व त्या बिंदूपर्यंतच्या रेषाखंडाची सापेक्ष लांबी y माना. y व x यांच्यातील आलेख अनंत पुनरावृत्तीनंतर या सैतानी जिन्याकडे आपल्याला घेऊन जातो. कँटर सट रचनेतील पहिली पायरी बघा : x ची किंमत जशी 0 ते 1/3 वाढते

तशी y ची किंमत 0 ते 1/2 अशी वाढते. (आकृती 11.1 पाहा - दोन रेषाखंडांची एकूण लांबी 2/3 म्हणून एका रेषाखंडांची सापेक्ष किंमत 1/2). x ची किंमत 1/3 ते 2/3 दरम्यान असताना. y ची किंमत 1/2 वरच स्थिर राहते, आणि x 2/3 ते 1 असा वाढला की y ची किंमत 1/2 ते 1 अशी वाढते. आकृती 11.2 मध्ये पुनरावृत्तीच्या दोन पायऱ्या दाखविल्या आहेत. अशा प्रकारे अनंत वेळा पुनरावृत्ती झाल्यावर आपण सैतानाच्या जिन्यावर पोहोचतो.



(अ)



(ब)

आकृती 11.2 : सैतानाच्या जिन्याची रचनाकृती : (अ) कृतीची पहिली पायरी, (ब) तिसरी पायरी.

हे फल (function) खरोखरच फार विचित्र प्रकारचे आहे. लक्षात घ्या की कँटर सट हा एका रेषेवरील बिंदूंचा विरळ सट आहे. म्हणजेच त्या सटात रेषेवर जवळजवळ प्रत्येक ठिकाणी मोकळ्या जागा आहेत. याचा अर्थ सैतानाचा जिना दर्शविणाऱ्या आलेखात सर्व ठिकाणी सपाट क्षितिजसमांतर भाग आहेत, फक्त कँटर यांच्या धूलिकणांच्या जागी अतिशय सूक्ष्म तुटकपणा, खंडितपणा आहे. कँटर सटातील गणनीय नसलेल्या, अनंत बिंदूंवरील या सूक्ष्म तुटकपणामुळेच या फलाची किंमत शून्यावरून एकपर्यंत (0 ते 1) उचलली जाते. या

सैतानी जिन्याला फक्त सपाट पायऱ्या असून दोन पायऱ्यांमधील उंचीचा फरक अदृश्य भासण्याइतका सूक्ष्म आहे. परंतु तरीही हा जिना चढून आपण शिखरावर पोहोचू शकतो! मात्र हा जिना काही केवळ अशा सैतानी गमतीजमतीसाठीच वापरला जात नाही. आंदोलकांच्या कालजुळणीच्या प्रश्नाच्या सोडवणुकीसाठी याचा उपयोग महत्त्वाचा ठरलेला आहे. कोणत्याही प्रकारची आवर्तने ज्यात घडतात त्याला भौतिकीत आंदोलक म्हटले जाते. लंबक, बागेतील झोपाळा, साधा ए. सी. (प्रत्यावर्ती धारा) परिपथ, वा रेडिओ किंवा दूरदर्शन संचात असणारे अशा परिपथांचे जाळे, इत्यादी. दोन आंदोलकांच्या वारंवारतेच्या गुणोत्तरांच्या विशिष्ट किमतींना त्यांची कालजुळणी घडून येते व ते परस्परांशी 'जखडले' जातात. अशा उपयोजनात जिन्याची उंची त्या दोन आंदोलकांच्या वारंवारतेचे गुणोत्तर दर्शविते तर 'पठारे' (सपाट भाग) जखडलेल्या वारंवारतांची गुणोत्तरे दर्शवितात. हा सैतानी जिना संभाव्यता सिद्धान्तातही उपयोगास येतो.

ह्या पुस्तकाच्या सुरुवातीस आपण निसर्गातील संहतींच्या गतिशास्त्रात आढळणाऱ्या कोलाहलाचा विचार केला. या भागात आपण अपूर्णमित भूमितीचा विचार केला आहे. कोलाहल व अपूर्णमिते यांच्यात काय संबंध आहे? हे दोन विषय या पुस्तकात एकत्र येण्याचे कारण काय? या दोहोतील गुणात्मक पातळीवरील एक साम्य आपणास आधीच माहीत झाले आहे. कोलाहल व अपूर्णमित एक समान संदेश देत आहेत : वरवर दिसून येणाऱ्या अनियमित हालचालींमागे (कोलाहलामागे) वा अनियमित आकारांमागे (अपूर्णमितांमागे) काही आश्चर्यकारक सोपे नियम व नियमितपणा दडलेला असणे शक्य आहे. परंतु कोलाहल व अपूर्णमित यांच्यामध्ये यापेक्षाही अधिक तपशीलवार व तरल संबंध आहे. विज्ञानाच्या या नव्या आघाडीवरील सर्वात वैशिष्ट्यपूर्ण संकल्पनांपैकी एक संकल्पना या संबंधातून आपल्यापुढे प्रकट होते - 'अनोख्या कर्षकांची' कल्पना.

संदर्भ 21 मध्ये सैतानाच्या जिन्यासंबंधी विवेचन आहे. संदेशवहनातील चुकांमधील स्वयंसमरूपतेच्या मॅन्डेलब्रॉटनी लावलेल्या शोधाची गोष्ट संदर्भ 4 मध्ये.

बारा

अनोखे कर्षक

निसर्गातील अरेषीयता विविध अवतारांत प्रकट होते. कधी ती एखाद्या स्फोटक स्थितीची वाढ रोखून तिला समतोल स्थितीत आणणाऱ्या देवदूताचे रूप घेते; तर कधी भरमसाट वाढीस कारणीभूत होऊन विस्फोट वा अराजक घडवून आणणारे राक्षसी स्वरूप धारण करते. कधी विशिष्ट परिस्थितीत अरेषीयतेमुळे संहतीची हालचाल आवर्ती स्वरूपाची होते; तर कधी ती कोलाहलाकडे वाटचाल करते (प्रकरण 2).

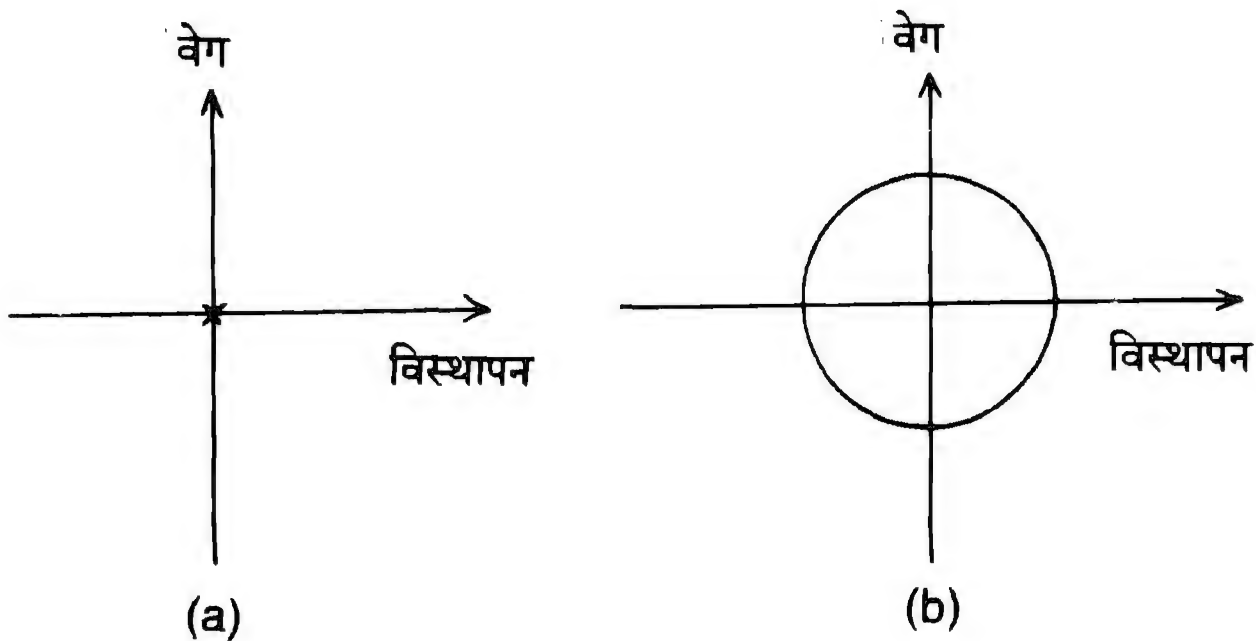
अरेषीय संहतींमध्ये खूपच वैविध्य व व्यामिश्रता असते, परंतु तरीही त्यांचे एक वैशिष्ट्य असते. कालांतराने बहुतेक संहती काही ठरावीक संथ, एकसारख्या हालचालींवर येऊन स्थिरावतात. संथ, एकसारख्या हालचाली निव्वळ समतोलापेक्षा वेगळ्या असतात. समतोलात परस्परविरोधी बले एकमेकांना पूर्ण शह देतात व ती संहती निष्क्रिय, स्थिर स्थितीत जाते. टेबलावर पडलेले पुस्तक गुरुत्वाकर्षण बल व टेबलाची पुस्तकावरील प्रतिक्रिया यामुळे निर्माण होणाऱ्या निष्क्रिय समतोलाचे उदाहरण आहे. याउलट बाह्य आवर्ती बलाने चालित लंबक संथ, एकसारखी हालचाल करत असतो, पण तो समतोलात नसतो. विशिष्ट दोलविस्तारात व चालकाच्या वारंवारतेइतक्या वारंवारतेने तो आंदोलत असतो. समतोलात असलेली संहती प्रावस्था अवकाशात एका बिंदूवर स्थिर असते, तर संथ हालचालीतील संहती प्रावस्था अवकाशात एका ठरावीक मार्गावर फिरत असते. म्हणजेच समतोल स्थिती हा सर्वसाधारण संथ स्थितीच्या अनेकविध आविष्कारांतील एक साधा आविष्कार म्हटला पाहिजे.

संहतीच्या संथ स्थितीची दोन अंगे ध्यानात घेणे महत्त्वाचे आहे. एक म्हणजे स्थैर्य. कोणत्याही बाह्य कारणामुळे जरी संहतीच्या संथ स्थितीत चढउतार घडून आले तरी कालांतराने ते विरून जातात व संहती आपल्या मूळ स्थितीत परत जाते. दुसरे अंग तसे पहिल्यापासून पूर्ण वेगळे नाही. ते म्हणजे संथ स्थितीला संहतीच्या प्रारंभस्थितीची 'स्मृती' नसते. वेगवेगळ्या प्रारंभस्थितींमुळे संहती वेगवेगळ्या मार्गांनी उत्क्रांत होते. परंतु काही काळातच या अस्थिर, अल्पजीवी हालचाली विरून जातात व संहती आपल्या संथ स्थितीवर येते. जणू काही त्या संहतीच्या प्रावस्था अवकाशात संथ स्थिती आपल्या

सभोवतालच्या क्षणिक, अस्थिर मार्गरेषांना स्वत:कडे खेचून, आकर्षून घेत असते. याच कारणामुळे या संथ स्थितींना संहतीचे 'कर्षक' असे संबोधले जाते.

एखाद्या संहतीशी एकापेक्षा अधिक कर्षक निगडित असले तर तिचे प्रावस्था अवकाश प्रत्येक कर्षकाशी संबंधित अशा 'आकर्षणपात्रांत' विभागले जाते. प्रत्येक कर्षक त्याच्या आकर्षणपात्रातील मार्गरेषा वा स्थिती आपल्याकडे खेचून घेतो. कर्षक प्रावस्था अवकाशातील एक स्थिर बिंदू असू शकतो - कोणतीही प्रारंभावस्था असली तरी संहती अखेर या समतोल स्थितीवर येते. किंवा कर्षक प्रावस्था अवकाशातील एका ठरावीक मार्गरेषेच्या रूपात असू शकतो - सुरुवातीच्या अस्थिर हालचालींनंतर संहती उत्क्रांत होऊन अखेर या संथ स्थितीत फिरत राहते.

लंबकाच्या हालचालींचा अभ्यास करताना आपली गाठ या कर्षकांशी पडलेलीच आहे (प्रकरण 3). आपल्याला ठाऊक आहे की मुक्त अवमंदित लंबक कशाही प्रकारे आंदोलित केली तरी अखेर उभ्या स्थितीत येऊन स्थिरावतो. प्रावस्था अवकाशातील त्याची मार्गरेषा सर्पासारखी वलयाकार (सर्पिल) असते व आकुंचन पावत अखेर उगमबिंदूशी येते. या स्थितीत लंबकाची विस्थापना व वेग दोन्ही शून्य असतात. प्रावस्था अवकाशातील कोणत्याही बिंदूपासून लंबकाचे हिंदकळणे सुरू झाले तरी अखेर तो उगमबिंदूवरच येतो. प्रावस्था अवकाशातील उगमबिंदू हा अवमंदित लंबकाचा (रेषीय वा अरेषीय) 'कर्षक' आहे. आपण हेही बघितले आहे की चालित रेषीय लंबक अखेरीस संथ आवर्ती हालचाली



आकृती 12.1 : अवमंदित लंबकाचे कर्षक : (अ) मुक्त लंबकाचा बिंदू कर्षक; (ब) चालित लंबकाचा आवर्ती कर्षक.

करू लागतो. प्रावस्था अवकाशातील त्याची मार्गरेषा बंद वलयाकृती असते आणि त्याला प्रारंभावस्थेची 'स्मृती' राहिलेली नसते. त्या लंबकाच्या प्रावस्था अवकाशातील सर्व मार्गरेषा, त्यांचा प्रारंभ कोठूनही झाला असला तरी, अखेरीस त्या बंद वलयाकडेच उत्क्रांत होतात. हे बंद वलय त्या लंबकाचा 'आवर्ती कर्षक' असतो. या आवर्ती कर्षकाला 'मर्यादाचक्र' असेही संबोधले जाते.

आवर्ती कर्षक हे अरेषीयत्वाचे सर्वत्र आढळून येणारे एक अंग आहे - केवळ भौतिकी शास्त्रांतच नव्हे तर इतर अनेक संदर्भांतही. आपल्या प्रत्येकाच्या वागणुकीचे स्वत:चे असे संथ आवर्ती आकृतिबंध असतात. कोणत्याही कारणाने आपण भरकटलो तरी अखेर पुन्हा याच आकृतिबंधाकडे परत येतो. उदाहरणार्थ, प्रत्येकाचा निद्रितावस्था व जागृतावस्थेचा 24 तासांचा विशिष्ट फेरा असतो. काही बाह्य कारणांमुळे (काळजी वा कामाचा व्याप) या फेऱ्याच्या नियमितपणाला बाधा येते. परंतु तरीही काही काळाने आपण पुन्हा त्या विशिष्ट फेऱ्याप्रमाणेच वागू लागतो. तो विशिष्ट फेरा आपल्या दैनंदिन वागणुकीचा कर्षक असतो. असे कर्षक जर अस्तित्वात नसते तर आपल्या आयुष्याला धड दिशाच लाभली नसती.

अशी आवर्तने केवळ आपल्या शरीरव्यवहारातच असतात असे नव्हे. आपल्या सामाजिक व्यवहारातही ती आढळतात. उदा. काही फॅशन्सचे थोड्या पिढ्यांनंतर पुनरुज्जीवन का होते? समाज आपल्या भूतकाळाकडे परतण्याचा जाणीवपूर्वक प्रयत्न करतोय असे यावरून वाटणे शक्य आहे. परंतु काही प्रतिमानांनुसार फॅशनची ही आवर्तने पूर्णपणे अंतर्गत अरेषीयत्वामुळे घडून येतात - एक फॅशन सोडून दुसरी फॅशन आपलीशी करणाऱ्या व्यक्तींची संख्या ठरविणाऱ्या समीकरणांत ही अरेषीयता दडलेली असते.

आपण असा समाज कल्पूया की त्यातील स्त्रिया फॅशनच्या तीन मुख्य प्रकारांत विभागल्या गेल्या आहेत : उच्च, मध्यम व कनिष्ठ. पोशाख वा केशरचनेबाबत हे तीन फॅशनप्रकार नक्की काय दर्शवितात हा तपशील प्रतिमानाच्या दृष्टीने महत्त्वाचा नाही. महत्त्वाची आहेत ती दोन कळीची गृहीते. एक, समाजांतील दोन पिढ्यांत 'पुरोगामी' प्रवृत्ती स्पष्टपणे आढळते. मुली एकतर आईच्या फॅशनगटात राहतात वा वरच्या गटात प्रवेश करतात. म्हणजे आई मध्यम गटात असल्यास मुलगी मध्यम गटात असते वा उच्च गटात; ती कधीच कनिष्ठ गटात जात नाही. दुसरे गृहीत म्हणजे वेगवेगळ्या गटांत असलेल्या जननक्षमतेतील फरक - सरासरी मुलींची संख्या कनिष्ठ गटात सर्वात जास्त तर उच्च गटात सर्वात कमी असते.

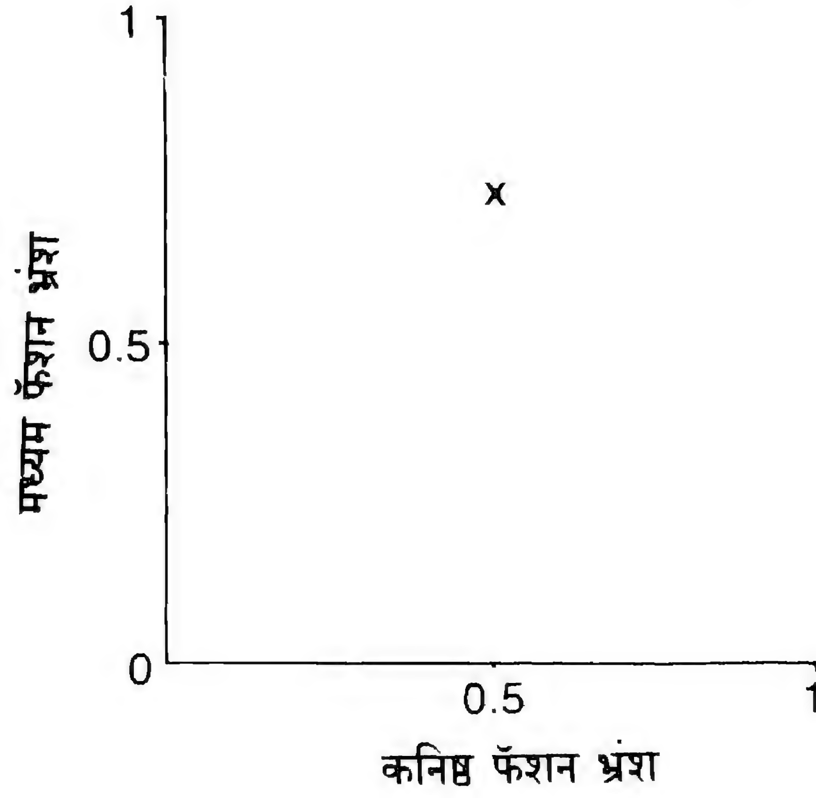
आश्चर्याची गोष्ट म्हणजे फॅशनसंबंधित ह्या सरळसाध्या प्रतिमानात खूपच संपन्न संरचना आढळून येते. समजा, फॅशनच्या या दुनियेतील पुरोगामी प्रवृत्ती रेषीय आहे. म्हणजे एका गटातून पुढील पिढीत वरच्या गटात जाणाऱ्या स्त्रियांचे प्रमाण ठरावीक स्थिर आहे. या परिस्थितीत असे आढळून येते की कालांतराने समाज समतोल स्थितीत येतो, फॅशनच्या तिन्ही गटांतील स्त्रियांची विशिष्ट प्रकारे वाटणी होते. या संहतीचे प्रावस्था अवकाश द्विमितीय असते, कारण तीन गटांतील विभागणी वर्णन करायला टक्केवारी दर्शविणारे दोन अपूर्णांक लागतात (तिन्ही अंशांची बेरीज 1 होते, त्यामुळे तिसरा अंश दर्शविणारा अपूर्णांक स्वतंत्र नसतो). या रेषीय प्रतिमानाचा प्रावस्था अवकाशातील कर्षक एक बिंदू असतो. प्रारंभीची स्थिती कोणतीही असली तरी तो समाज शेवटी या बिंदूकडे येऊनच स्थिरावतो. या कर्षक बिंदूचे स्थान फॅशनच्या तीन गटांतील रेषीय पुरोगामी प्रवृत्तीची तीव्रता आणि जननक्षमतेतील फरक यांच्यावर अवलंबून असते.

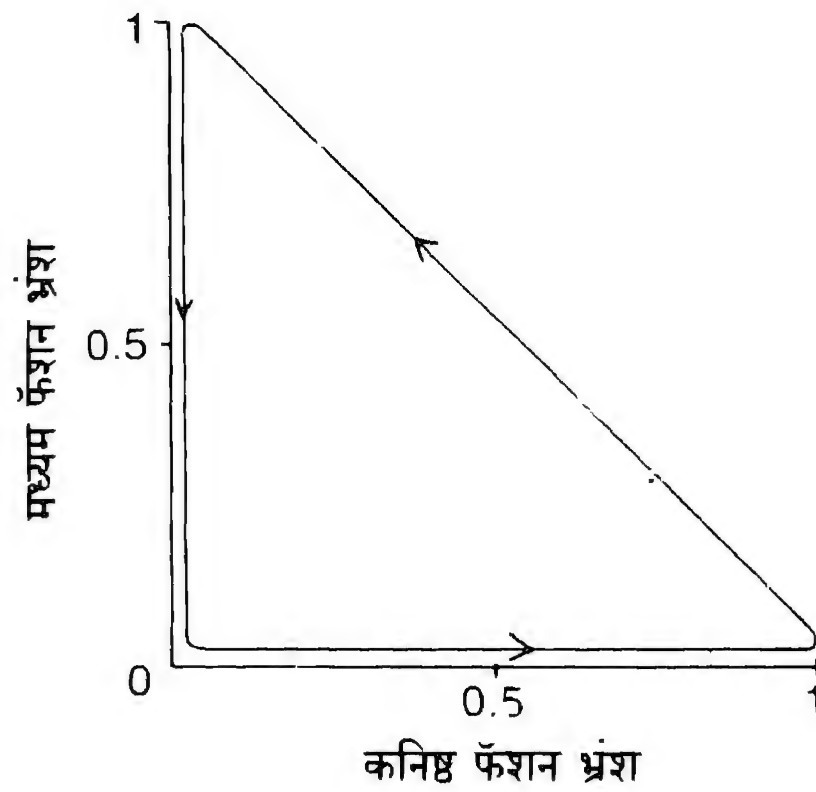
परंतु हे रेषीय प्रतिमान काही वास्तव नाही. आपल्यापेक्षा अधिक फॅशनवाल्यांचे अनुकरण करणे हे फॅशनमध्ये अध्याहृतच आहे. त्यामुळे एका गटातून वरच्या गटात जाण्याची प्रवृत्ती एका स्थिर अंशाने व्यक्त करता येत नाही; ती वरच्या गटातील संख्येवर अवलंबून राहील. अधिक फॅशन करणाऱ्या स्त्रिया जितक्या जास्त तितकी त्यांचे अनुकरण करण्याची कमी फॅशनवाल्यांमधील प्रवृत्ती अधिक बळकट. यामुळे हे प्रतिमान अरेषीय बनते. अशा प्रकारच्या एका अरेषीय प्रतिमानात असे मानले गेले आहे की, एका गटातून फक्त लागून असलेल्या गटातच प्रवेश शक्य आहे. म्हणजे कनिष्ठ फॅशन गटातील स्त्रिया पुढील पिढीत मध्यम फॅशनवाल्या होऊ शकतात, परंतु त्या थेट उच्च फॅशन गटात जात नाहीत. शिवाय असेही मानले गेले आहे की खालच्या गटातून वरच्या गटात जाण्याची प्रवृत्ती ही फक्त वरच्या गटातील संख्येच्या प्रमाणात असते. ही साधी गृहीते तशी वास्तव आहेतच, पण त्यांच्यामुळे या प्रतिमानाचे गणिती स्वरूपही जरा सोपे, सोडविण्याजोगे राहते. एखादा छोटा संगणक हाताशी असल्यास या प्रतिमानाद्वारे मिळणारी उत्तरे काढता येतात.

ही उत्तरे फारच आश्चर्यकारक आहेत. प्रथमदर्शनी कोणालाही वाटेल की पुरोगामी प्रवृत्तीमुळे अशी स्थिती येईल की सर्वच स्त्रिया उच्च फॅशन गटात असतील. परंतु असे होत नाही. कारण येथे दोन विरोधी प्रवृत्ती सतत कार्यरत असतात - अनुकरणामुळे उच्च फॅशनकडे वळण्याची प्रवृत्ती, तर अधिक जननक्षमतेमुळे कनिष्ठ फॅशनगटात होणारी वाढ. या उदाहरणातील अरेषीयता अशा प्रकारची आहे की या दोन प्रवृत्तींमध्ये समतोल साधलाच जात नाही. उलट या प्रतिमानातील समाज कनिष्ठ-मध्यम-उच्च-कनिष्ठ अशा फॅशनच्या आवर्तनात कायमचा अडकला जातो (आकृती 12.2). वेगळ्या शब्दांत सांगायचे तर अरेषीय फॅशन प्रतिमानाच्या प्रावस्था अवकाशात एक आवर्ती कर्षक आहे. निरनिराळ्या गटांतील प्रारंभीच्या लोकसंख्या कशाही असल्या तरी सुरुवातीच्या अस्थिर हालचालींनंतर तो समाज या कर्षकाकडेच खेचला जातो.

'फॅशन' हा शब्द येथे वर्गवाचक म्हणून वापरला आहे हे सांगायलाच नको. या प्रतिमानाबाबतची गृहीते ज्याला बऱ्यापैकी लागू पडतात तो गुणधर्म 'फॅशन' या वर्गात मोडू शकतो. उदा., उच्च साक्षरतेची प्रवृत्ती वर्तमान साक्षरतेच्या पातळीवर तीव्रतेने अवलंबून असते असे आपण मानले तर फॅशन म्हणजे साक्षरता होते. यावरून आपल्या लक्षात येते की अरेषीय प्रतिमानांत, मग ती भौतिकीतील असोत, शरीरशास्त्रातील असोत वा समाजशास्त्रातील, त्यांत 'कर्षक' असतात आणि पूर्वेतिहास कसाही असला तरी संहती शेवटी या कर्षकांच्या स्थितीकडेच खेचल्या जातात.

कोलाहलाचा शोध लागण्यापूर्वीपासूनच अरेषीय विज्ञानाला बिंदू कर्षक व आवर्ती कर्षक परिचित होते. खरे म्हणजे पॉइनकारे व इतरांच्या प्रारंभीच्या संशोधनकाळातच यासंबंधीची काटेकोर प्रमेये मांडली गेली होती. कोलाहलाचा शोध लागला तेव्हा साहजिकच पुढे आलेला प्रश्न होता : ज्या संहतीत कोलाहल असू शकतो तिच्या प्रावस्था अवकाशात कर्षक पण आढळेल काय? तसे पाहता हा प्रश्न अशा सर्वसाधारण स्वरूपात विचारला गेला नव्हता. 1971 साली डेव्हिड रूल व फ्लोरिस टेकन क्षुब्धतेच्या





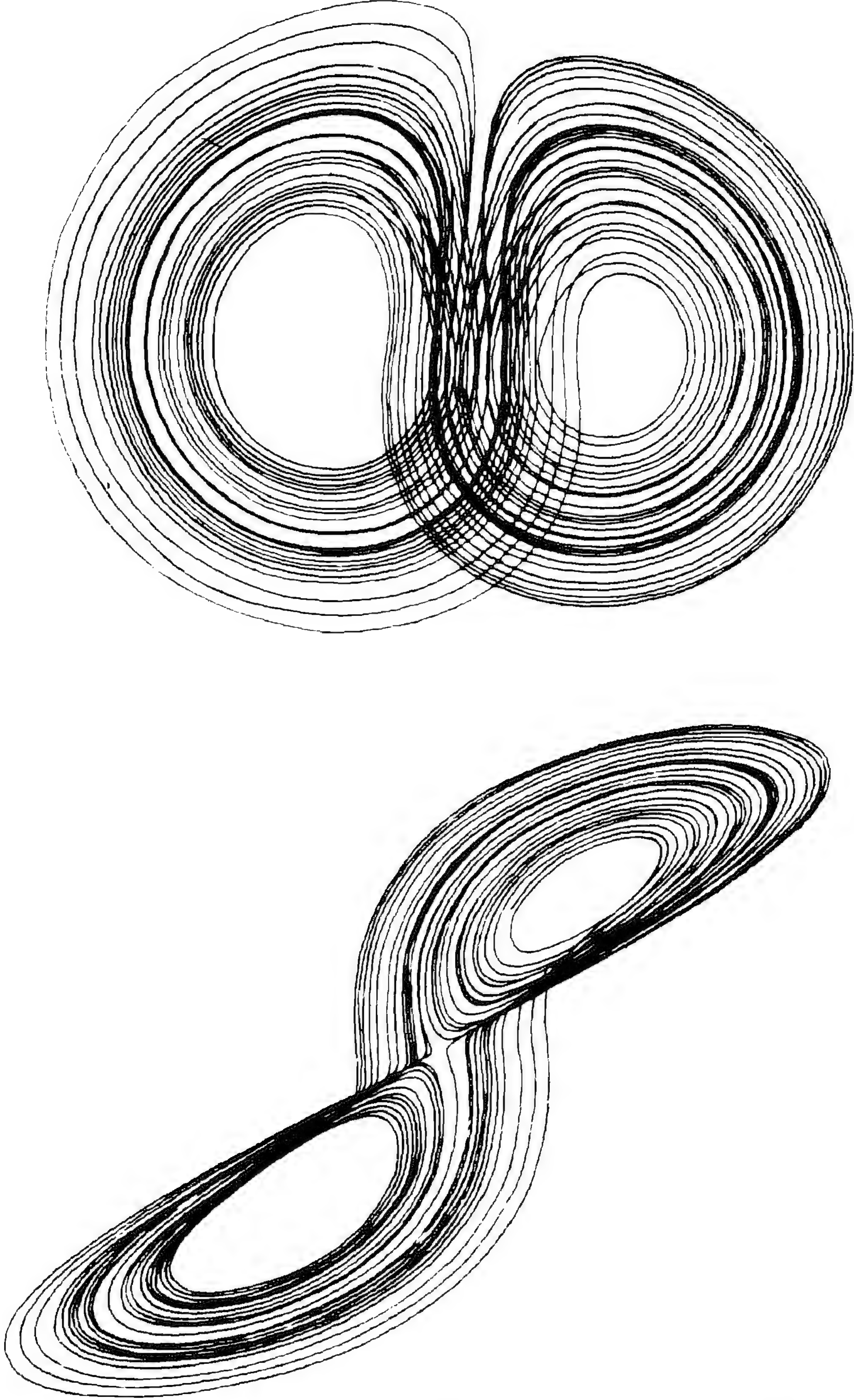
आकृती 12.2 : एका विशिष्ट फॅशन प्रतिमानातील कर्षक : (अ) रेषीय प्रतिमानात तीन गटांतील स्त्रियांच्या संख्येत समतोल निर्माण होतो (बिंदू कर्षक); (ब) अरेषीय प्रतिमानात समाज फॅशनच्या आवर्तनात कायमचा अडकला जातो (आवर्ती कर्षक).

(turbulence) प्रश्नावर संशोधन करीत असताना हा प्रश्न पुढे आला. त्याचे उत्तर सकारार्थी होते : कोलाहलीय हालचाल प्रावस्था अवकाशातील कर्षकांबरोबरही जोडली गेली आहे. परंतु हे कर्षक वैज्ञानिकांना तेव्हा परिचित असलेल्या कर्षकांपेक्षा फारच निराळे होते. व्यामिश्र, अनोळ्या आणि नजरेसमोर आणण्यास खूप कठीण अशा त्या प्रावस्था अवकाशातील चिजा होत्या. कोलाहलीय हालचालींबरोबर आहेत 'अनोखे कर्षक'.

कोलाहलीय हालचालींचे काही मूलभूत गुणधर्म आहेत व ते प्रावस्था अवकाशातील या अनोळ्या आकारांत प्रतिबिंबित झालेच पाहिजेत. एक : कोलाहलीय हालचाल

प्रारंभस्थितीवर अतिसंवेदनाशीलपणे अवलंबून असते. याचा अर्थ प्रावस्था अवकाशात सुरुवातीस शेजारी शेजारी असणाऱ्या बिंदूंचे मार्ग एकमेकांपासून भिन्न होत गेले पाहिजेत. दोन : कोलाहलीय हालचाल कधीच काटेकोर आवर्ती नसते - त्यामुळे प्रावस्था अवकाशात आवर्ती कर्षक असू शकत नाही. परंतु कोलाहल अर्ध-आवर्ती असू शकतो. पृथ्वीवरील हवामान काही काटेकोरपणे आवर्ती नसते, परंतु ते बऱ्याच अंशी आवर्ती स्वरूप दाखविते. तसे नसते तर ऋतू आणि मोसम यांना अर्थच राहिला नसता. तीन : कोलाहलीय हालचाल असीमित नसते. अनिश्चितपणे कशाही बदलणाऱ्या प्राणिसंख्या पण सीमितच राहतात. कोलाहल स्थितीतील चालित लंबकाची विस्थापना व गती यांचे भाकीत करता येत नसले तरी त्यांची किंमत मर्यादितच राहते. हवामान 'फुलपाखरू परिणाम' दर्शविते; परंतु दाब, तापमान, आर्द्रता इत्यादी भौतिक परिमाणे मर्यादित असतात. याचा अर्थ कोलाहलीय हालचालींचे कर्षकही प्रावस्था अवकाशात मर्यादित आकारमानात बंदिस्त असले पाहिजेत. अखेरीस आणखी एक अट पाळली जाणे आवश्यक आहे. गतिशास्त्रीय चलांच्या संपूर्ण प्रावस्था अवकाशांत दोन मार्गरेषांचा कधीच एकमेकींना छेद जाता कामा नये. तसे झाल्यास प्रारंभीच्या एकाच समान स्थितीतून दोन वेगळ्या मार्गरेषा तयार होतील. संहतीच्या निश्चिततावादी स्वरूपाच्या नियमांत हे बसू शकत नाही.

वरवर पाहता प्रावस्था अवकाशातील कर्षकाच्या आकारासंबंधीच्या या अटींची कधी पूर्ती होईल असे वाटत नाही - हा आकार मर्यादित भागातच सीमित राहिला पाहिजे, अनावर्ती वा अर्ध-आवर्ती असलेल्या या मार्गरेषांनी एकमेकींना छेद देता कामा नये, तरीही जवळच्या बिंदूंचे मार्ग मात्र एकमेकापासून विलग होत जाणारे हवेत! परंतु प्रत्यक्षात असे आकार शक्य असल्याचे आढळून येते. स्टीफन स्मेल याने ताणणे, घडी घालणे, आकुंचित करणे अशा प्रकारची जी रूपांतरे कल्पिली होती तशी रूपांतरे प्रावस्था अवकाशात करून वरील अटी पाळणारे कर्षकांचे आकार निर्माण करता येतात. या रूपांतरांमुळे जवळचे मार्ग विलग होत दुरावतात, पण त्याच वेळी ते सीमितही राहतात. यातून त्रिमितीत तयार होणारे आकार अनंतस्तरीय पृष्ठभाग असतात. घड्यांवर घड्या असलेले हे पृष्ठभाग अतिशय कार्यक्षमतेने अवकाश व्यापतात, पण त्रिमिती घन वस्तूंप्रमाणे आकारमान मात्र व्यापत नाहीत. पहिला अनोखा कर्षक लॉरेन्झने त्याच्या द्रवाच्या अभिसरणाच्या प्रतिमानात शोधून काढला. या लॉरेन्झ कर्षकाला दोन परस्परांशी जोडलेली पाखे असतात व प्रत्येक पाख्यात असतात एकमेकांना न छेदणाऱ्या वलयांचे स्तरावर स्तर! (आकृती 12.3) या कर्षकाच्या एका पाख्यातून दुसऱ्यात जाणे प्रतिमानात द्रवाच्या भ्रमणाची दिशा बदलण्याशी जोडलेले असते. या कोलाहलीय कर्षकांसंबंधीची खास नोंद घेण्याजोगी गोष्ट म्हणजे प्रारंभस्थितीवर अतिशय संवेदनाक्षमपणे अवलंबित असूनही व्यापक अर्थाने ते स्थिर असतात. म्हणजे संहतीची सुरुवात कशीही झाली तरी तिची प्रावस्था अवकाशातील मार्गरेषा अखेरीस अनोख्या कर्षकाच्या आकाराकडेच येऊन स्थिरावते. अर्थात संहतीचे गतिशास्त्र कोलाहलीय असल्यामुळे अनोख्या कर्षकाच्या कोणत्या बिंदूवर ती स्थिरावेल हे काही सांगता येत नाही.



आकृती 12.3 द्रवाच्या अभिसरणाच्या लॉरेन्झकृत प्रतिमानातील अनोखा कर्षक; दोन वेगळ्या कोनांतून पाहताना (नमुन्यादाखल).

सीमित जागेत बंदिस्त परस्परांशी जोडलेल्या वलयांचे अनंतस्तरीय जाळे! यावरून लगेच आठवतात ते अपूर्णमित. कॉख वक्र आठवून पाहा - नागमोडी कंगोरलेला अनंत लांबीचा, पण पृष्ठाच्या सीमित भागात मावणारा हा वक्र 1.26 मिती असलेला अपूर्णमित

आहे. लॉरेन्झचा कर्षक हाही एक अपूर्णमित असल्याचे आढळून आले आहे आणि त्याची मिती 2 व 3 च्या दरम्यान आहे. अशा प्रकारचे इतर अनेक अपूर्णमित कर्षक शोधले गेले आहेत. तसे पाहता यापूर्वी वर्णिलेली अरेषीय चालित लंबकाची प्रावस्था अवकाश मार्गरेषादेखील एक अपूर्णमित पृष्ठभागच आहे.

अशा प्रकारे अनोख्या कर्षकांच्या संकल्पनेत कोलाहलीय गतिशास्त्र व अपूर्णमितीय भूमिती एकत्र आले आहेत : कोलाहलीय हालचालींचा अपूर्णमित नेहमीच्या अवकाशात नव्हे तर संहतीच्या प्रावस्था अवकाशात असतो. कोलाहलाच्या वरवर पाहता विरोधी भासणाऱ्या दोन लक्षणांचे अनोख्या कर्षकांच्या रूपात तरल पातळीवर एकीकरण झालेले आहे. कोलाहलीय गती स्थानिक पातळीवर अस्थिर आहे (प्रारंभस्थितीवरील अतिसंवेदनाक्षम अवलंबित्व). परंतु व्यापक पातळीवर ती स्थिर आहे - कारण सर्व मार्गरेषा अखेरीस कोलाहलीय कर्षकावरील कोणत्या ना कोणत्या बिंदूवर येऊन स्थिरावतात. विज्ञानातील स्थैर्याच्या संकल्पनेचा अनोखा कर्षकांनी अशा प्रकारे मूलभूतरीत्या विस्तार घडविला आहे.

एक शेवटचा प्रश्न उरतोच. निसर्गातील संहतींमध्ये साधे व अनोखे कर्षक अस्तित्वात असतात यामागील भौतिक कारण कोणते? प्रचंड व्यामिश्रता असणाऱ्या अरेषीय संहती अखेर संथ हालचालींवर स्थिरावतात - हा साधा गुणधर्म त्यांत का आढळावा? कदाचित या प्रश्नाला एक सर्वसाधारण उत्तर नसेलही. पण एका गोष्टीची नोंद आपण घेतली पाहिजे. अवमंदित नसलेल्या लंबकाला कर्षक नाही. रेषीय अनवमंदित लंबकाच्या प्रावस्था अवकाशातील मार्गरेषा एककेंद्रीय वर्तुळांच्या स्वरूपात असतात (आकृती 3.3), वर्तुळाची त्रिज्या लंबकाच्या एकूण ऊर्जेवर अवलंबून असते. जेव्हा अवमंदन होते तेव्हाच सर्व मार्गरेषा केंद्राकडे खेचल्या जातात. म्हणजेच अवमंदन लंबकाला अखेरीस एका समान स्थितीत येण्यास भाग पाडते. ही गोष्ट चालित लंबकाबाबतही खरी आहे. सर्वसाधारणपणे घर्षण, सांद्रता इत्यादींमुळे होणारा ऊर्जेचा ऱ्हास वा क्षय एक वाईट, नकारात्मक गोष्ट मानली जाते - शक्यतो टाळावी वा किमानपक्षी कमी करावी अशी. परंतु निसर्गातील अरेषीय संहतींच्या बाबत - उदाहरणार्थ हवामान, शरीरशास्त्रीय आवर्तने, चालित आंदोलक वगैरे - ऱ्हास एक सकारात्मक भूमिका बजावतो. संहतीच्या स्थैर्याला धोका उत्पन्न करणाऱ्या चढउतारांना आवर घालून ती संहती तिच्या स्थिरस्थितीत जखडून ठेवण्यात त्याची मदत होते. संहतींच्या कोलाहलीय हालचालींतील अनोख्या कर्षकांचे स्थैर्य अस्तित्वात येते ते निसर्गात सार्वत्रिक आढळणाऱ्या ऱ्हासीय प्रक्रियांमुळे. विरोधाभासी वाटले तरी ऱ्हास हा सुव्यवस्थेला कारणीभूत आहे.

संदर्भ 22 मध्ये फॅशन प्रतिमान वेगळ्या संदर्भात आहे. अनोख्या कर्षकांसंबंधीचे लिखाण संदर्भ 7, 4, 21 आणि 5 यांवर आधारित आहे.

भाग तिसरा

निसर्गातील कोलाहल व अपूर्णमित



तेरा

तोट्या, भेगा, वणवे आणि कथा दिलाची

प्रत्येक अनियमित हालचाल काही कोलाहलीय नसते. तसेच प्रत्येक नागमोडी वक्र वा प्रत्येक उंचसखल पृष्ठभाग काही अपूर्णमित नसतो. एखादे अरेषीय समीकरण घेतल्यास प्राचलांच्या कोणत्या विस्तारात कोलाहलनिर्मिती होईल हे समजून घेणे तसे तुलनात्मकदृष्ट्या सोपे आहे. परंतु याचा व्यत्यास म्हणजे उलट क्रिया मात्र सोपी नाही. आपल्याला आढळून येणारी एखादी हालचाल अनियमित कोलाहल व शुद्ध गोंगाट (स्वैर हालचाल) यांचे मिश्रण असू शकते. कोलाहलापासून गोंगाट बाजूस काढणे आणि निरीक्षणाद्वारे कोलाहलीय हालचालीचा अनोखा कर्षक वेचून काढणे हे मोठे आव्हानच असते, व फक्त विशेषज्ञच ते पेलू शकतात.

हीच गोष्ट अपूर्णमितांनाही लागू आहे. वेगवेगळ्या मापनप्रमाणांत लागू पडणारे आवर्ती रूपांतर दिल्यास एक अपूर्णमित आकार तयार करणे फारसे अवघड नसते. परंतु एखादा नैसर्गिक गुंतागुंतीचा आकार घेतल्यास (एखादा वाकडातिकडा वक्र वा एकमेकांत गुंतलेल्या घड्यांवर घड्या असणारा आकार) त्यात दडलेला अपूर्णमित शोधून काढणे व त्याची मिती निश्चित करणे ही गोष्ट काही सहजसाध्य नाही. निसर्गातील कोलाहल व अपूर्णमित यांच्या पाऊलखुणा तांत्रिक गुंतागुंतीत झाकल्या जाऊ शकतात. अनुभवजन्य विश्लेषण व प्रतिमान तयार करणे या खास तंत्रांचा वापर करून संशोधक निसर्गातील विविध क्षेत्रांत कोलाहल व अपूर्णमित यांचा शोध घेण्याचा प्रयत्न करतात. या खेळाला तसा अंतच नाही, कारण निसर्गात कोलाहल व अपूर्णमित सर्वत्र भरपूर प्रमाणात विखुरलेले आहेत.

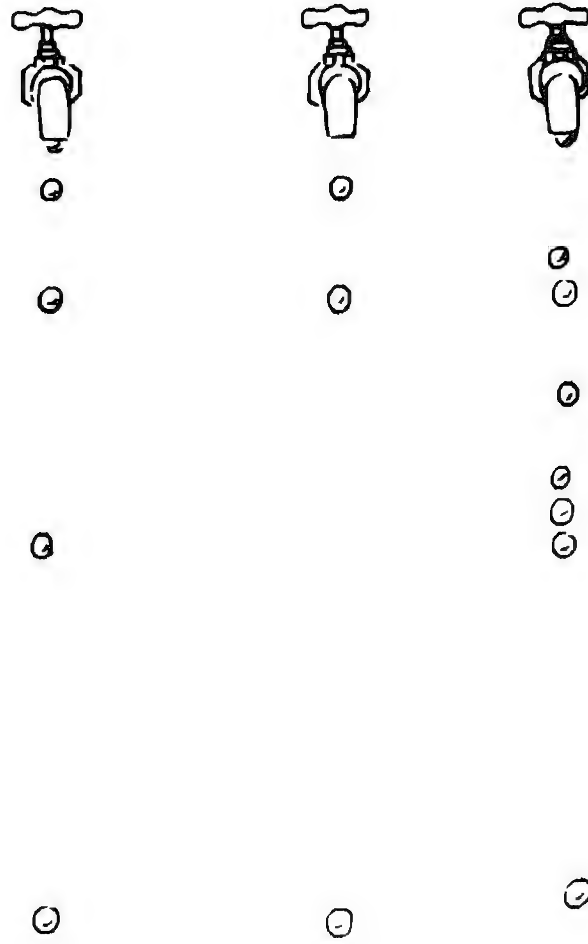
कोलाहल व अपूर्णमित यांचे हे सर्वव्यापीपण कशामुळे उद्भवते? एक कारण उघडच आहे - निसर्गातील बहुतांशी प्रक्रियांमध्ये सबळ अरेषीयत्व अंगभूतच असते. आकारनिर्मिती करणाऱ्या भौतिकी प्रक्रियांत जेव्हा नैसर्गिक लांबीचे प्रमाण अंतर्भूत नसते तेव्हा वेगवेगळ्या मापनप्रमाणांत स्वयंसमरूपता निर्माण होऊन अपूर्णमित आकार उदयास येतात. निसर्गाच्या दृष्टीने अपूर्णमित फायद्याचे ठरतात, कारण सामान्य सफाईदार वक्र व पृष्ठभागापेक्षा ते अवकाशाचा वापर अधिक कार्यक्षमतेने करतात. आणि जीवशास्त्रातील अनेक संदर्भात अशा कार्यक्षम वापराची नितान्त आवश्यकता असते. सर्वसाधारण

भूमितीच्या दृष्टीने अपूर्णमित आकारांत थक्क करणारी व्यामिश्रता असते. परंतु निर्मितिपद्धतीचा विचार केला तर अपूर्णमित हे सोपेपणाचा अर्कच म्हणावे लागतील. कारण एक वा अगदी मोजकी आवर्ती रूपांतरे वापरून त्यांची निर्मिती होते. जीवशास्त्रीय संरचनांत ही आवर्ती रूपांतरे जनुकांतच नोंदविलेली असणे शक्य आहे. कदाचित याच कारणामुळे सचेतन सृष्टीत अपूर्णमित संरचनांची सार्वत्रिक निर्मिती होत असावी.

गळक्या तोटीतील कोलाहल

न्हाणीघरातील नळाची तोटी गळत असते. थेंबाची अनियमित टपटप एक कटकटच असते. त्यांत चांगला विज्ञानविषय दडला असेल अशी शंकासुद्धा येण्याचे कारण नसते. पण अमेरिकेतील कॅलिफोर्निया विद्यापीठ (सांताक्रूझ) येथे पदव्युत्तर संशोधन करणाऱ्या रॉबर्ट शॉ याने वेगळा विचार केला. सुरुवातीपासूनच कोलाहलाचा चाहता असलेल्या शॉला प्रमाण मानल्या गेलेल्या उच्चभ्रू भौतिकीविषयांपेक्षा गळक्या तोटीबद्दल अधिक कुतूहल वाटले. गळक्या तोटीसंबंधात कोणाच्याही डोळ्यांसमोर येणारी पहिली गोष्ट म्हणजे पाठोपाठच्या दोन थेंबांमधील कालावधी. शॉने ह्याच सर्वांत साध्यासोप्या चलाची मोजमापे घेतली. गळतीचा वेग खूप कमी असताना थेंब एकदम नियमित पडत असतात - दोन थेंबांतील कालावधी सारखाच असतो. नळ थोडा मोठा सोडल्यावर आश्चर्यकारक गोष्ट घडून येते. समजा एक थेंब पडल्यावर त्यानंतरचा पहिला थेंब एक-पंचमांश सेकंदाने पडतो. त्यानंतरचा दुसरा थेंब वेगळ्या कालावधीने पडतो - समजा एक-अष्टमांश सेकंद. परंतु तिसरा थेंब पुन्हा एक-पंचमांश सेकंदाने, तर चौथा एक-अष्टमांश सेकंदाने पडतो, व असेच चालू राहते. म्हणजे गळणाऱ्या तोटीसंबंधी दोन आंदोलनकाल होतात, 'आंदोलनकाल दुप्पटी' होते. नळ अधिक मोठा सोडल्यास एका विशिष्ट टप्प्याला गळती एकाएकी 'आंदोलनकाल चार' स्थितीत जाते. येथे एक गोष्ट लक्षात ठेवली पाहिजे की या प्रकारची तंतोतंत नियमितता फक्त संगणकीय प्रतिमानातच आढळते. प्रत्यक्षातील तोटीची गळती गोंगाटामुळे काहीशी भ्रष्ट झालेली असते. मात्र शॉने केला त्या प्रकारच्या काळजीपूर्वक प्रयोगांत ही नियमितता अदमासे असली तरी निश्चितपणे आढळून येते. नळ अधिकाधिक मोठा सोडत गेले की पुढच्या आंदोलनकाल-दुप्पटी होत जातात व अखेर एका टप्प्यानंतर गळती पूर्ण अनियमित होते.

ही अनियमितता म्हणजे खरोखरीच कोलाहल आहे, निव्वळ एखादी स्वैर हालचाल नाही हे तपासता येते. त्यासाठी योग्य ते प्रावस्था अवकाश निवडून त्यातील अनोखा कर्षक शोधला पाहिजे. या गोष्टीतील सर्वांत महत्त्वाचा व कठीण भाग हाच आहे. शॉने लागोपाठच्या कालावधींचा त्रिमिती आलेख काढला : प्रावस्था अवकाशातील एक बिंदू तीन कालावधी दर्शवितो T_1, T_2, आणि T_3; त्यानंतरचा बिंदू दर्शवितो T_2, T_3, T_4; त्यापुढील T_3, T_4, T_5 इत्यादी. सुरुवातीच्या 'आंदोलनकाल एक' स्थितीत प्रावस्था अवकाशात फक्त एकच बिंदू असतो, कारण सर्व कालावधी सारखेच असतात. 'आंदोलनकाल दोन' स्थितीत दोन बिंदू असतात व 'आंदोलनकाल चार' मध्ये त्यांची संख्या चार होते. ही संख्या जशी



आकृती 13.1 : गळणाऱ्या तोटीतील कोलाहल.

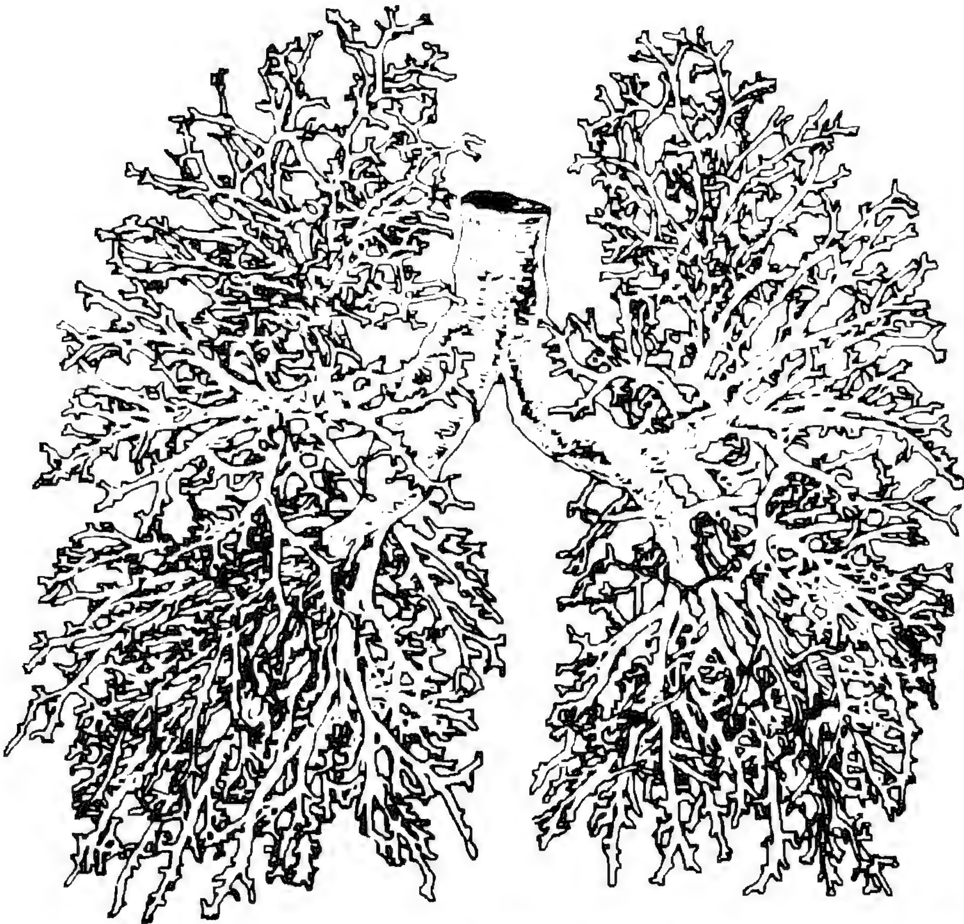
कोलाहल स्थितीत प्रवेश करते तशी या बिंदूची धूळ प्रावस्था अवकाशात गूढ वाटणारा, पण आखीव आकार जन्माला घालते. हाच तो गळणाऱ्या तोटीचा अनोखा कर्षक. निव्वळ गोंगाट असल्यास प्रावस्था अवकाशात बिंदू अव्यवस्थितपणे विखुरलेले आढळून येतील. कोलाहल निव्वळ अव्यवस्थेपासून वेगळा ओळखून काढण्यात अनोख्या कर्षकाचे अस्तित्व कामी येते. गळक्या नळातील कोलाहलाचा उगम सापडतो तो थेंब ज्या प्रकारे पडतात त्यात अंगभूत असलेल्या अरेषीयत्वात. तोटीतील पाणी गुरुत्वाकर्षणामुळे लांबुळके होते व त्याचा काही भागच थेंबाच्या रूपात खाली पडतो. उरलेला वर उसळी घेतो आणि नंतर येऊ पाहणाऱ्या थेंबावर त्याचा परिणाम होतो. थेंब निव्वळ गुरुत्वाकर्षणाच्या रेषीय बलाने पडत नाहीत. एका थेंबाचे पडणे त्यानंतरच्या थेंबावर परिणाम घडवून आणते. यामुळेच गळकी तोटी कोलाहलास योग्य उमेदवार ठरते.

मानवी शरीरातील कोलाहल व अपूर्णमित

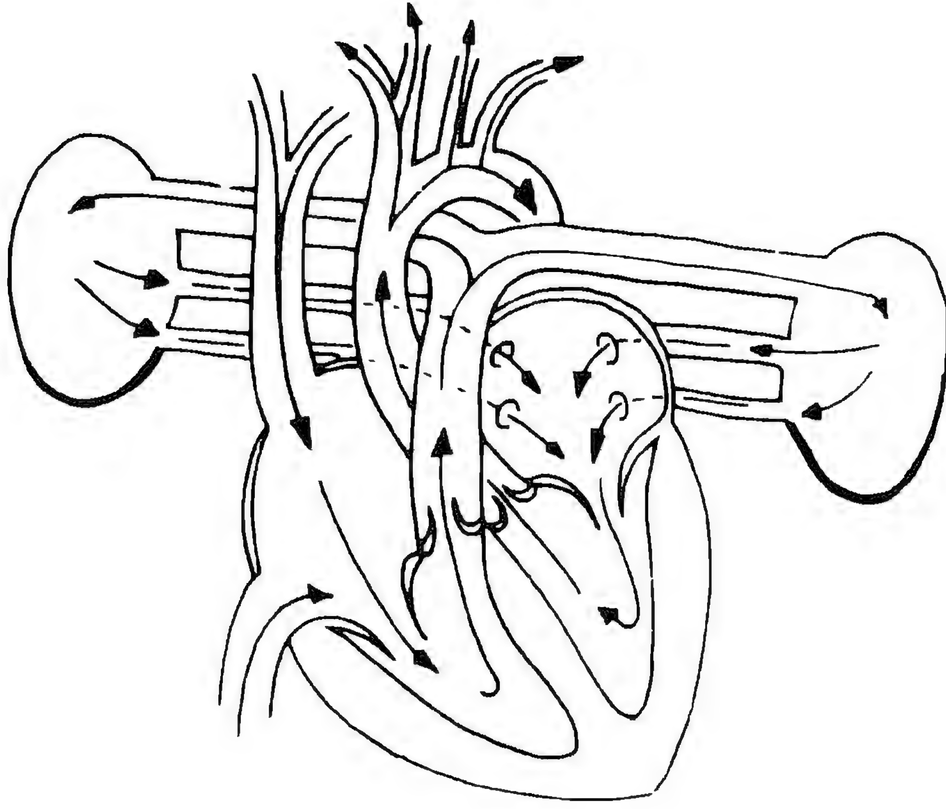
मानवी श्वसनसंस्थेतील श्वासनलिकांचे जाळे म्हणजे निसर्गातील अभियांत्रिकी चमत्कारच म्हटला पाहिजे. श्वासमार्ग फुफ्फुसांशी श्वासनलिकांनी जोडलेला असतो. प्रत्येक श्वासनलिका अनेक छोट्या नलिकांत, श्वसनिकांत विभागली जाते. ही विभागणी अधिकाधिक सूक्ष्म होत जाते व अखेरीस हवेचा हा मार्ग वायुकोशांपर्यंत म्हणजे पातळ व छोटेखानी पिशव्यांपर्यंत पोहोचतो. येथे फुफ्फुसातील छोट्या रक्तवाहिन्यांतील तांबड्या रक्तपेशी ऑक्सिजन शोषून घेतात व कार्बनडायऑक्साइड वायू बाहेर सोडतात. ही गुंतागुंतीची

रचना कित्येक लहानमोठ्या मापप्रमाणांत स्वयं-समरूपता दाखविते. हा 3 च्या जवळपास मिती असणारा अपूर्णमित आहे. शरीरातील हे अपूर्णमित निसर्गाला आपल्या गरजेपोटी शोधून काढावे लागले असे दिसते. शरीरात फुफ्फुसांकरिता उपलब्ध असलेली जागा लहानच आहे. या जागेत गुळगुळीत पृष्ठभागाचे फुफ्फुस असते तर ते तुलनात्मकदृष्ट्या मोठी असलेली शरीराची ऑक्सिजनची गरज भागविण्यास पुरे पडले नसते. अधिक ऑक्सिजन घेता यावा यासाठी अधिक पृष्ठभागाची गरज पडते. मर्यादित उपलब्ध आकारमानाचा अधिकाधिक कार्यक्षमतेने वापर करण्यासाठी फुफ्फुसांत बराच मोठा पृष्ठभाग असा कोंबून भरलेला असतो. अपूर्णमिताचा आश्रय घेण्याखेरीज निसर्गाला दुसरा पर्यायच नाही.

श्वसनसंस्थेपेक्षाही अधिक मोठा अभियांत्रिकी चमत्कार म्हणजे शरीरातील रक्ताभिसरणसंस्था. येथेही वरील गोष्ट तितक्याच प्रकर्षाने लागू पडते. हृदयाच्या आकुंचनामुळे त्याच्या उजव्या बाजूने रक्त फुफ्फुसात लोटले जाते, आणि ऑक्सिजनभारित रक्त फुफ्फुसातून हृदयाच्या डाव्या बाजूस परत येते. तेथून ते महारोहिणीत धाडले जाते व पुढे धमनींच्या शाखा-उपशाखांतून फुटत जाणाऱ्या असंख्य केशनलिकांद्वारे शरीरभर पोहोचवले जाते. स्नायूंना व पेशीजालाला ऑक्सिजनपुरविला जातो आणि ऑक्सिजन विरहित रक्त छोट्या नीलांतून मोठ्या नीलांत असे करत अखेर दोन महानीलांतून हृदयाच्या उजव्या कप्प्यात परतते. उपलब्ध जागेचा जास्तीत जास्त कार्यक्षमतेने वापर करणे आणि त्याच वेळी शरीराच्या प्रत्येक कानाकोपऱ्यात पोहोचणे या गरजेपोटी रोहिणी व नीलांच्या या जाळ्याला अपूर्णमित स्वरूप धारण करावे लागते. याशिवाय हृदयाच्या स्नायूंपर्यंत विद्युतसंदेश घेऊन जाणाऱ्या खास तंतूंचे गुंतागुंतीचे जाळेही अपूर्णमितांच्या पायावरच उभारले गेले असावे असे वाटते.



आकृती 13.2 : शरीरातील श्वासनलिकांचे जाळे एक अपूर्णमित असतो.



आकृती 13.3 : मानवी हृदय एक अरेषीय गतिशास्त्रीय संहती असून तिच्या स्थिती अनियमित, आवर्ती व कोलाहलीय असतात.

संवेदनाक्षम पश्चभरण (फीडबॅक) वलये असलेली ही हृदयाची आश्चर्यकारक रचना एक अरेषीय गतिशास्त्रीय संहती आहे हे उघडच आहे. निरोगी व्यक्तीमध्ये ही रचना आवर्ती असते. अनावर्ती हालचाल हे रोगाचे व आजारपणाचे लक्षण असते. पेस-मेकर अस्थिर, अनियमितपणे धडधडणाऱ्या हृदयास आवर्ती स्थितीत आणतो, अरेषीय संहती एका मर्यादित आवर्तनात जखडली जाते. एका नेहमी आढळणाऱ्या हृद्रोगात (व्हेन्ट्रिक्युलर फायब्रिलेशन) ही रक्ताभिसरणसंस्था अतिशय वेड्यावाकड्या लयीत जाते - हृदयाची आकुंचने फार जलद, अनियमित व अकार्यक्षमपणे होऊ लागतात. हा रोग एखाद्या ठरावीक ठिकाणी निर्माण झालेल्या दोषापेक्षा एकूणच रचनेच्या व्यापक विकाराशी जोडलेला असावा. हृदयाच्या हालचालींचे तपशीलवार प्रतिमान संगणकाद्वारे अभ्यासल्यावर कितीतरी नवीन गोष्टी कळल्या असून नवे उपायही पुढे आले आहेत. मात्र अजूनही या गोष्टी संशोधनपातळीवरच आहेत. यातून पुढे आलेली एक कल्पना मात्र सर्वसाधारण समजुतीच्या विरोधात जाणारी आहे. हृदय तसेच मज्जाशास्त्रविषयक संहतींमधील काटेकोर आवर्तने ही वृद्धापकाळ वा विकार दर्शविणारी असू शकतात. काटेकोर आवर्तनीयता आणि रचनाहीन अव्यवस्था या दोहोंच्या मध्ये कोलाहलाचे स्थान आहे. त्यामुळे संहतीला बदलक्षमता तसेच मजबुती दोन्ही प्राप्त होतात. कोलाहल चांगल्या आरोग्याचे लक्षण असू शकते!

भूशास्त्रीय घटना

भूवैज्ञानिकांच्या दृष्टीने विखंडन ही एक महत्त्वाची घटना आहे. धूप, ज्वालामुखीचे उद्रेक वा मानवनिर्मित स्फोट यांच्यामुळे खडकांचे विखंडन घडून येते. प्रस्तरकवचातील प्रक्रियांमुळे पृथ्वीच्या पृष्ठभागावर तडे जातात. भेगा निर्माण होऊन खूप अरेषीय पद्धतीने पसरत जातात

व त्यातून विखंडन घडून येते. यातील मूलभूत प्रक्रियांत अंगभूत असे मापप्रमाण बहुधा नसावे. कारण विखंडन घातांकी नियमानुसार चालते असे संख्याशास्त्रीय निरीक्षणांवरून दिसून येते. 'r' ह्या विशिष्ट लांबीपेक्षा अधिक लांबी असणाऱ्या वस्तूंची संख्या जर 'N' असेल तर $N \propto r^D$ असे आढळून आले आहे. यावरून लक्षात येते की विखंडनक्रियेचा प्रसार अपूर्णमित पद्धतीने होतो. तुटलेला कोळसा, ग्रॅनाइट व बसॉल्ट यांची अपूर्ण मिती साधारण 2.5 च्या जवळपास आढळते. तुलनेसाठी बघायचे झाले तर फोडलेल्या क्वार्टझ (बिलोरी) ची मिती आढळते सुमारे 1.9. विखंडन क्रियेमागील तपशीलवार नियम समजणे कठीण आहे, परंतु या नियमांत असलेली मापप्रमाण निश्चलता प्रत्यक्ष निरीक्षणांतून ठळकपणे नजरेस येते.

तसे पाहता मापप्रमाण निश्चलता भूवैज्ञानिकांना नवीन नाही. भूकंपांची भीती सर्वत्र असते, पण ते कसे घडतात हे काही आपल्याला धड कळलेले नाही. एक गोष्ट मात्र ठाऊक झाली आहे की त्यात स्वत:चे अंगभूत असे आकारमान नाही. भूकंप मोठे, मध्यम, लहान आणि क्षुल्लक म्हणावे अशा प्रमाणात होतात. परंतु प्रमाणात फरक असला तरी त्यांचे मूलभूत स्वरूप एकच असते. ही गोष्ट पुन्हा एकदा घातांक नियमावरून कळून येते : जगभरात ठरावीक कालखंडात एका विशिष्ट तीव्रतेपेक्षा (m) अधिक तीव्रता असलेल्या भूकंपांची संख्या, N, विरुद्ध ती तीव्रता m (उदा. रिश्टर प्रमाणात मोजलेली) यांचे नाते घातांकी स्वरूपाचे आढळते. (आकृती 13.4), पृथ्वीवरील जमिनीच्या स्वरूपात तर जागोजागी अपूर्णमित आकार आढळून येतात : किनारपट्ट्या (मिती 1 व 2 दरम्यान) आणि डोंगरांचे कंगोरलेले आकार, दऱ्या इत्यादी (मिती 2 व 3 दरम्यान). तसेच ढगांच्या आकारांतही कित्येक भिन्न मापनप्रमाणांत स्वयं-समरूपता असते. सर्वसाधारण आकृत्यांत क्षेत्रफळ व परिमिती यांच्यातील लॉगरिदम आलेख काढल्यास त्याचा उतार 2 येतो. ढगांच्या बाबतीत मात्र निरीक्षणांती मिळणारा हा उतार खूपच कमी म्हणजे 1.5 च्या आसपास येतो. यावरून लक्षात येते की साधारण ढगाची परिमिती एक अपूर्णमित आहे, सुमारे 1.3 मिती असलेला.

याच प्रकारे अनेक भूशास्त्रीय घडामोडींत कोलाहलही दडलेला असतो. यातील सर्वाधिक नजरेत भरणारे म्हणजे कदाचित हवामानच. लॉरेन्झच्या हवामान प्रतिमानातील महत्वाचा घटक आहे उष्णतेचे अभिसरण. परंतु पृथ्वीच्या अंतभार्गात युरेनियम, थोरियम, पोटॅशियम इत्यादींच्या किरणोत्सर्गामुळे निर्माण झालेली उष्णता वाहून नेण्यातही ही अभिसरणक्रियाच मुख्य भूमिका बजावते. हे अभिसरणही कोलाहलात्मक असण्याची शक्यता आहे. कोलाहलाचा आणखी एक उमेदवार म्हणजे पृथ्वीचे चुंबकीय क्षेत्र. पृथ्वीच्या अंतर्भागातील विद्युतवाहक द्रवाच्या (यात प्रामुख्याने लोखंड असते) चलनवलनातून हे चुंबकीय क्षेत्र निर्माण होते असे मानतात. पृथ्वीवरील भूतकाळातील चुंबकीय क्षेत्राची माहिती चुंबकीय दगडांच्या निरीक्षणांतून मिळते. या संशोधनातून निघणारे निष्कर्ष दर्शवितात की पृथ्वीच्या चुंबकीय क्षेत्राच्या ध्रुवांची स्वैर व उत्स्फूर्तपणे उलटापालट झालेली आहे - उत्तर ध्रुवाचा झाला दक्षिण ध्रुव व दक्षिण ध्रुवाचा उत्तर ध्रुव! अखेरची उलटापालट साधारणपणे दहा लाख वर्षांपूर्वी घडून आली. पृथ्वीच्या गाभ्यातील या 'जनित्रा'ची प्रतिमाने



आकृती 13.4 : लहान, मध्यम आणि मोठ्या भूकंपांचे मूलभूत स्वरूप एकच असते. भूकंपाचे मूल्यमापन आपण त्यामुळे होणाऱ्या जीवित व मालमत्ता हानीशी जोडत असल्याने वरील वस्तुस्थिती समजून घेणे थोडे कठीणच जाते.

ह्या स्वैर उलटापालटीची भाकिते करण्यात यशस्वी झाली आहेत आणि ही प्रतिमाने कोलाहलीय वागणूक दाखवितात.

पदार्थवैज्ञानिकांना भेगा आणि तडे यांच्यात खूप रस असतो. एखादी धातूची पट्टी मोडते तेव्हा मोडलेल्या जागेचे पृष्ठभाग गुळगुळीत नसतात. त्या ओबडधोबड पृष्ठभागांवर सर्वत्र सूक्ष्म उठाव वर आलेले असतात आणि हा ओबडधोबडपणा वेगवेगळ्या मापप्रमाण पातळ्यांवर स्वयं-समरूप असतो. या कारणामुळेच कितीही प्रयत्न केला तरी भंगलेले तुकडे बरोबर सांधले जाऊ शकत नाहीत. धातूच्या अपूर्णमित पृष्ठभागाची मिती त्याच्या ओबडधोबडपणाचे मापन असते. सुरुवातीच्या एका प्रयोगात मॅन्डेलब्रॉट, पस्सोया आणि पॉले यांनी कमी कार्बन असणाऱ्या पोलादी पट्ट्यांच्या भंगलेल्या पृष्ठभागाची मिती काढली व ती सुमारे 2.3 इतकी निघाली. ओबडधोबड डोंगरांच्या रांगांची अपूर्णमिती साधारणपणे एवढीच आढळून येते. म्हणजेच प्रदेशवर्णनाच्या दृष्टीने बघितले तर भंगलेल्या धातूंचे पृष्ठभाग हे खूप छोट्या मापप्रमाणातील डोंगराळ प्रदेशच म्हणावे लागतील! भंगण्याच्या विरुद्ध क्रिया म्हणजे एकत्र जुळून येणे - जिला प्रसरण - मर्यादित (diffusion-limited) एकत्रीकरण असेही म्हटले जाते - तीदेखील मापप्रमाण निश्चलता दाखविते. येथे प्रारंभी पदार्थकण सर्वत्र सारख्या प्रमाणात विखुरलेले असतात. जसे त्यांचे प्रसरण होते व ते परस्पर संपर्कात येतात तसे एकत्र चिकटले जाऊन छोटे पुंजके तयार होतात. छोटे पुंजके एकमेकांना

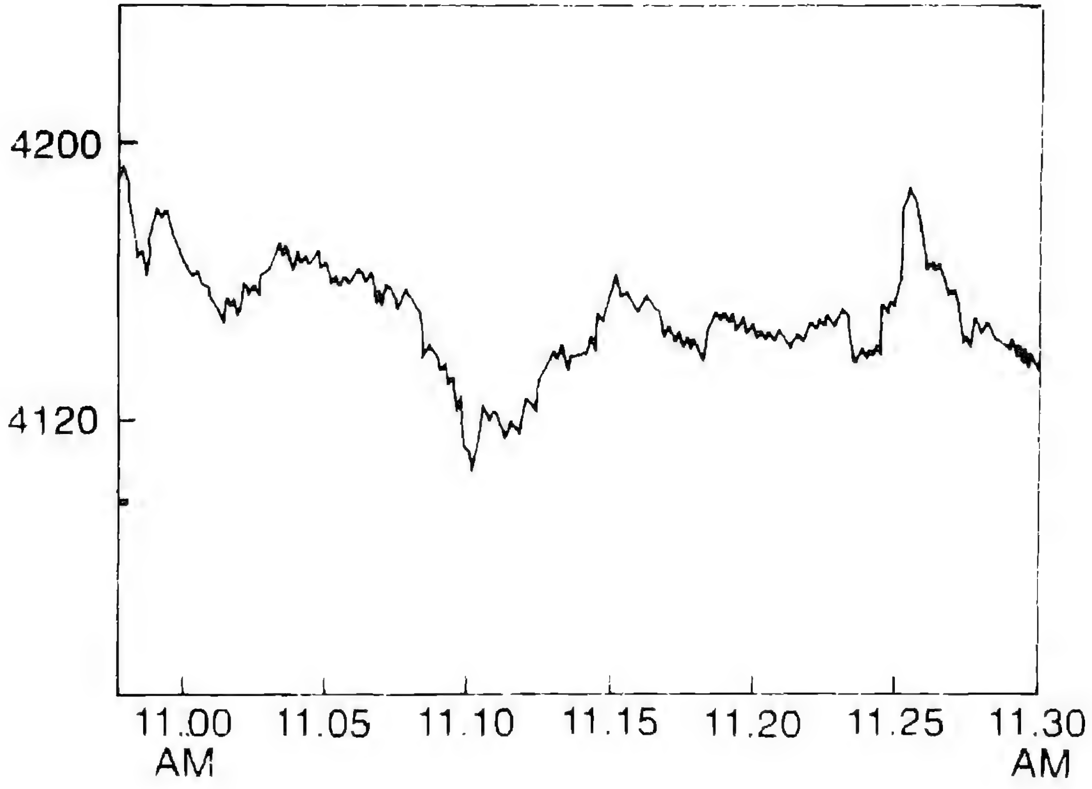
चिकटून अधिक मोठे पुंजके तयार होतात. त्यातून पुन्हा अधिक मोठे पुंजके तयार होतात. या स्वयं-समरूप समूहांवरून होणाऱ्या प्रकाशाच्या विकिरणाची मोजमापे घेऊन त्यांची अपूर्णमिती निश्चित करता येते. कलिल (colloidal) वाढ, तसेच विद्युतविश्लेषणामुळे बसणारा थर अशा प्रक्रियांचा अभ्यास करताना हे एकत्रीकरण महत्त्वाचे ठरते. कंड्या पिकणे व प्रवाद फैलावणे ही एक सार्वत्रिक सामाजिक घटना आहे. तिचे प्रतिमान बनविण्यातही एकत्रीकरण उपयोगी पडते.

समाजशास्त्रातील अपूर्णमित

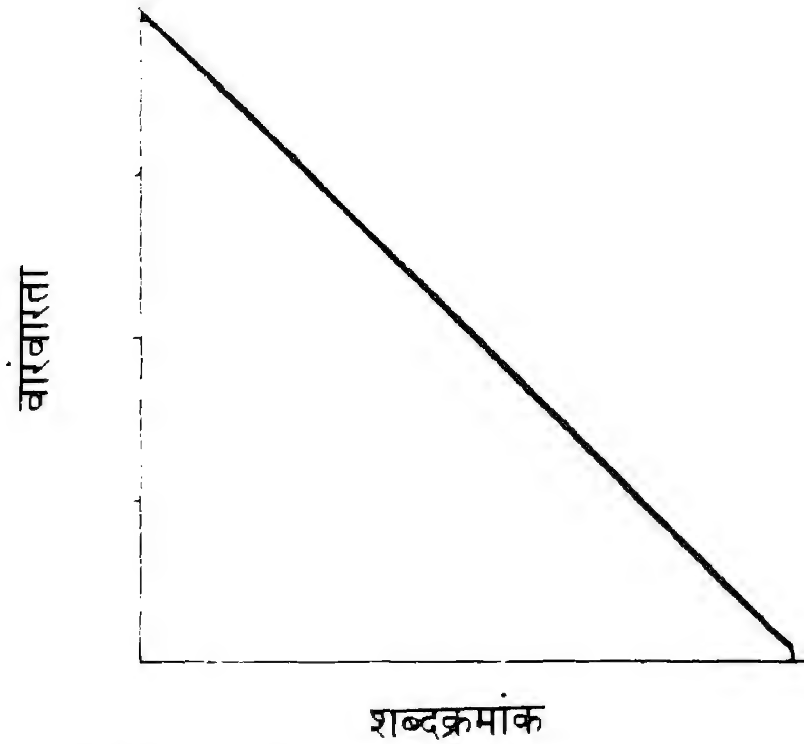
स्वयं-समरूपता व अपूर्णमित यांचा आढळ मानव्यविद्या व समाजशास्त्रांतही होतो. खरे म्हणजे निसर्गात मापप्रमाण निश्चलता शोधून काढण्याची कल्पना मॅन्डेलब्रॉटना सुचली तीच मुळी अर्थशास्त्राशी त्यांचा जो संपर्क आधी आला होता त्यातून. लोकांच्या उत्पन्नाची विभागणी तपासल्यास त्यात स्वंय-समरूप पुंजके आढळून येतात. उत्पन्नाचे प्रमाण व तेवढे उत्पन्न असणाऱ्या व्यक्तींची संख्या यांचे नाते घातांकी नियमात बसते. परंतु इतके असूनही शेअरबाजारातील वस्तूंच्या किमतींच्या निर्देशांकासंबंधी जे आढळले त्याने मॅन्डेलब्रॉटनाही आश्चर्याचा धक्का दिला.

सर्वसामान्यपणे गुंतवणूकदार असे धरून चालतात की अल्प मुदतीत (म्हणजे तासातासाने धरा) किमतीत होणारे चढउतार हे पूर्णपणे स्वैर स्वरूपाचे असतात, शेकडो परस्परसंबंधी घटकांमुळे (विज्ञानाच्या परिभाषेत मोठ्या संख्येच्या मुक्ततेच्या कोटीमुळे) ते निर्माण होतात, आणि त्यांच्याकडे दुर्लक्ष करणे हेच सर्वोत्तम. उलट कित्येक आठवडे वा महिने अशा दीर्घमुदतीतील सरासरी किंमती याच खऱ्या अर्थव्यवस्थेची (वा एखाद्या विशिष्ट उद्योगाची) स्थिती दर्शवीत असतात. अल्पमुदतीतील किमती स्वैरपणे बदलत असल्याने त्यांचे सरासरीभोवतीचे वितरण गाऊशियन असणे अपेक्षित असते. दीर्घमुदतीतील सरासरी किमती निश्चित, परंतु क्लिष्ट नियमांनुसार बदलतात; आणि हे नियम शोधून काढणे हे अर्थतज्ज्ञांचे काम आहे. प्रचलित दृष्टिकोन दीर्घमुदतीतील व अल्पमुदतीतील बदल भिन्न भिन्न मानतो.

परंतु शेअर्सच्या किमतींतील बदल घडवून आणणाऱ्या प्रक्रियांना ही भिन्नता मान्य नाही. या प्रक्रिया अल्प, मध्यम व दीर्घ मुदतीच्या बदलांमध्ये मिलाफ घडवून आणतात. किमतींतील चढउतार निरनिराळ्या कालमापन प्रमाणांत स्वयं-समरूप असतात. समजा तुम्ही अर्ध्या तासाच्या अवधीचा दर मिनिटाला किमतीत होणारे बदल दाखविणारा आलेख काढला. तो आकृती 13.5 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे असेल. नंतर दिवसभराच्या अवधीचा तासा-तासाचे बदल दाखविणारा आलेख काढा. आणि हीच गोष्ट महिन्याभराकरिता दर दिवसाचे बदल व वर्षभराकरिता दर महिन्याचे बदल घेऊन करा. हे सर्व वेगवेगळे आलेख समरूप दिसतील. अर्थात काही बाह्य कारणांमुळे अचानक निर्माण झालेल्या असमरूपता दिसतीलही. परंतु वस्तूंच्या किमतींतील चढउतार ज्या मूलभूत आर्थिक प्रक्रियांमुळे ठरविले जातात त्यात अंगभूत कालमापनप्रमाण नसते. न्यूयॉर्क शेअरबाजारातील गेल्या अनेक



आकृती 13.5 : शेअरबाजारातील किमतीच्या निर्देशांकात मिनिटा-मिनिटानुसार होणारे बदल (नमुन्यादाखल).



आकृती 13.6 : नैसर्गिक भाषेतील शब्दाची वारंवारता व क्रमांक यातील संबंध दाखविणारा झिफचा नियम.

दशकांतील कापसाच्या किमतींच्या जमलेल्या प्रचंड माहितीच्या आधारावर मॅन्डेलब्रॉटनी हे शोधून काढले.

अनेक नैसर्गिकपणे उद्‌भवलेल्या भाषांमध्ये आश्चर्यकारक अशी एक नियमितता आढळते. एखाद्या भाषेतील सर्वसाधारण, बऱ्यापैकी विस्तृत लिखाणाचा नमुना घ्या, आणि त्यातील निरनिराळे शब्द किती वेळा आले आहेत हे मोजून त्यांची उतरत्या क्रमाने यादी करा. एखाद्या शब्दाचा क्रमांक तो या यादीत कोठल्या स्थानावर आहे यावरून ठरतो.

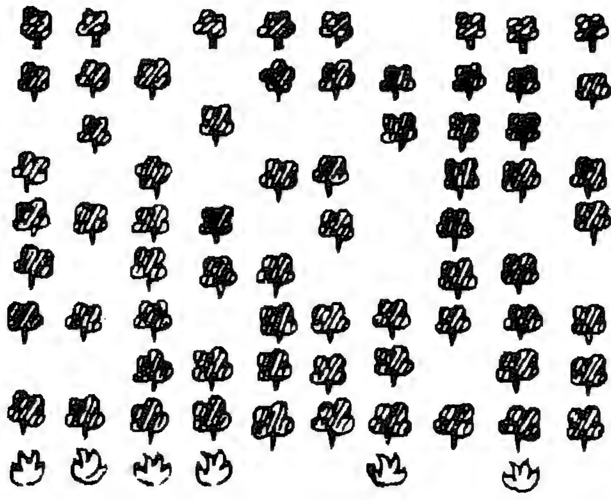
यादीतील सर्वात वरचा शब्द सर्वात जास्त वेळा आलेला असतो, व त्याचा क्रमांक असतो 1, त्यानंतर जास्त वेळा येणाऱ्या शब्दाचा क्रमांक 2, इत्यादी. उदाहरणार्थ आपण जर हिंदी भाषेतील लिखाण घेतले तर आढळते की 'के' हा शब्द सर्वाधिक वेळा येतो व त्यापाठोपाठ 'का', 'को', आणि 'भी' हे येतात. इंग्लिशमध्ये वरच्या क्रमांकाचे शब्द आहेत 'the', 'of', 'and', व 'to'.('द', 'ऑफ', 'ॲन्ड' व 'टू'), निरनिराळ्या पुस्तकांतील व निरनिराळ्या भाषांतील लिखाण तपासल्यावर एक सरळसाधा संबंध आढळून येतो. एका शब्दाची वारंवारता, n, ही त्याच्या क्रमांकाच्या (r च्या) व्यस्त प्रमाणात असते; $n \propto 1/r$. log n आणि log r यांच्यातील आलेख ऋण उतार असलेली सरळ रेषा असते. सुमारे पन्नास वर्षांपूर्वी जी.के.झिफ यांनी ही नियमितता शोधून काढली व ती झिफचा नियम म्हणून ओळखली जाते.

आता असे समजा की आपण एखाद्या परभाषेची फक्त मुळाक्षरे शिकलो आहोत, पण ती भाषा म्हणजे त्यातील शब्द आणि त्यांचे अर्थ व व्याकरण हे काही शिकलो नाही. या परिस्थितीत जर आपण ही अक्षरे कशीही स्वैरपणे कागदावर उतरविली, आणि अधूनमधून विशिष्ट संभाव्यतेनुसार त्यांच्यात मोकळी जागा सोडली तर आपण एक 'निरर्थक' वा 'अर्थहीन' भाषा निर्माण करू. ह्या 'अर्थहीन' भाषेचे स्वरूप अपूर्णमित असल्याचे लक्षात आले आहे. वारंवारता व क्रमांक यांच्यातील संबंध या भाषेतही झिफच्या नियमासारखाच असतो; पण एक महत्त्वाचा फरक असतो; खऱ्या भाषांना लागू पडणाऱ्या झिफच्या नियमात n आणि r यातील संबंधातील (1/r) चा घातांक 1 असतो ($n \propto (1/r)^1$) परंतु कृत्रिम अर्थहीन भाषेत मात्र तो x हा 1 पेक्षा मोठा अपूर्णांक असतो ($n \propto (1/r)^x$) xची निश्चित किंमत मुळाक्षरांची संख्या व मुळाक्षरांमध्ये अधूनमधून येणाऱ्या मोकळ्या जागेची संभाव्यता यावर अवलंबून असते. 40 मुळाक्षरे (साधारणपणे हिंदीतील अक्षरांची संख्या) असणाऱ्या भाषेत जर मोकळ्या जागेची संभाव्यता एक-षष्ठांश (1/6) घेतली तर हा घातांक येतो 1.05. यासंबंधीचा अधिक तपशील संदर्भ 18 मध्ये पाहावयास मिळेल.

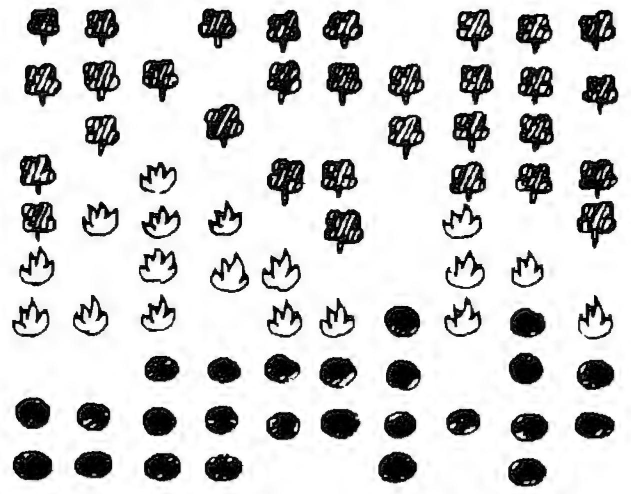
पाझरण्याची प्रक्रिया

पाझर वा झिरपण ही एक महत्त्वाची भौतिकी प्रक्रिया आहे. घनदाट अरण्यात पसरत जाणारा वणवा हे याच प्रक्रियेचे एक उदाहरण आहे. सुरुवातीस घर्षणासारख्या अकस्मात कारणामुळे काही झाडे पेट घेतात. ती त्यांच्याशेजारील झाडे पेटवतात. ती आणखी काही झाडे पेटवतात. ते अरण्य जर दाट असेल तर ह्या पेटाचे लवकरच प्रचंड आगीत रूपांतर होते. अरण्य फारच विरळ असेल तर थोडीफार झाडे जाळून आग विझून जाते. जवळजवळ हीच गोष्ट एखाद्या साथीच्या रोगाच्या प्रसाराबाबत होते. दाट लोकवस्तीत रोग झपाट्याने सर्वत्र फैलावतो, तर वस्ती विरळ असल्यास लोकसंख्येतील थोड्या व्यक्तींना आजारी पाडून ती साथ आटोक्यात येते.

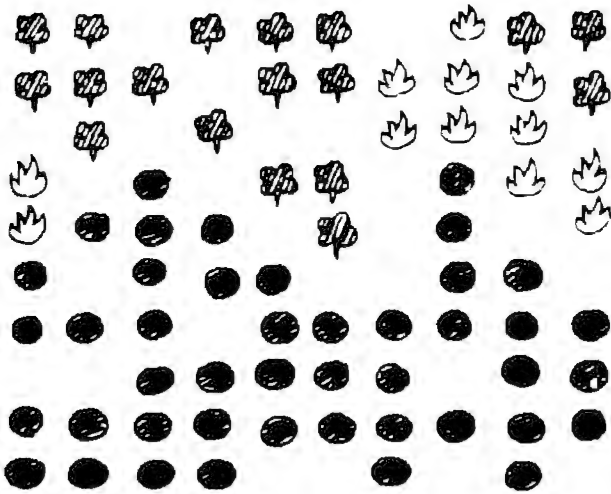
या झिरपण्याच्या प्रक्रियांची प्रतिमाने तयार करून ती संगणकावर चालवून बघितल्यास अनेक महत्त्वाच्या गोष्टी लक्षात येतात. अरण्याचे प्रतिमान म्हणून बिंदूंची एक चौरस मांडणी



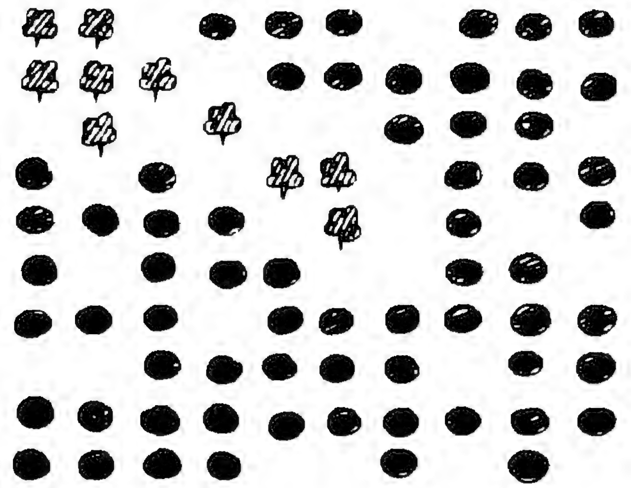
(अ)



(ब)



(क)



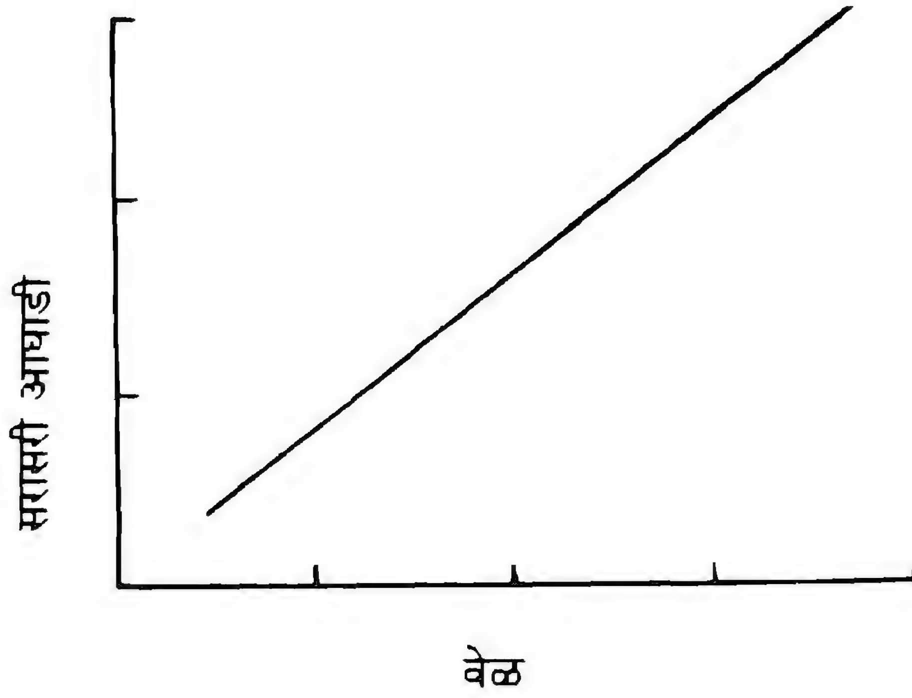
(ड)

आकृती 13.7 : अरण्यात पसरणारी आग : (अ) आगीची सुरुवात आणि (ड) आगीचा शेवट; (ब) आणि (क) मधल्या स्थिती दर्शवितात.

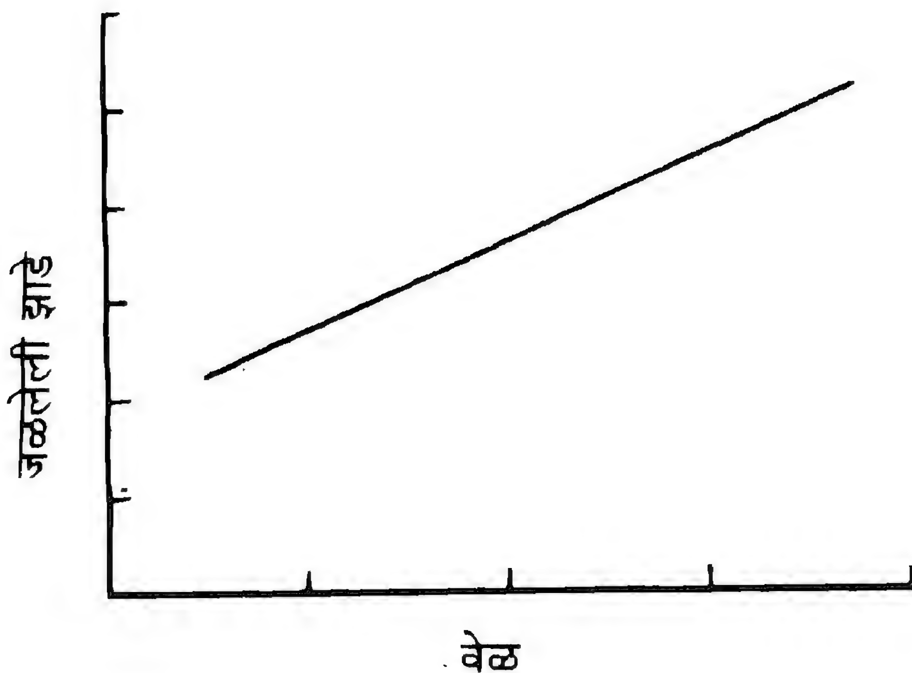
घ्या. (आकृती 13.7) एखाद्या बिंदूवर झाड उभे असण्याची संभाव्यता p माना. झाडांची सर्वांत खालची रांग पेटवा (अर्थात फक्त संगणकावरच!) आणि आग कशी पसरते याचे निरीक्षण करा. संभाव्यता p जर फार कमी असेल (म्हणजे झाडे बिंदूवर तुरळकच उभी असतील) तर अपेक्षेप्रमाणेच ती आग दुसऱ्या टोकाला पोहोचण्यापूर्वीच विझून जाईल. प्रत्येक बिंदूवर झाड उभे असेल ($P=1$) तर त्या मांडणीतील सर्व झाडे जळून खाक झाल्यावरच आग विझेल. सर्वसाधारणपणे आग दुसऱ्या टोकाला पोहोचायची असेल तर संभाव्यतेचा एक क्रांतिक उंबरठा (a critical threshold) आढळून येतो. त्याची किंमत P_c माना. प्रत्यक्षातील संभाव्यता P जर P_c पेक्षा जास्त असेल ($P > P_c$) तर आग दुसऱ्या टोकाला पोहोचते. P जर P_c पेक्षा कमी असेल ($P < P_c$) तर आग दुसऱ्या टोकास पोहोचण्यापूर्वीच विझते. संभाव्यतेच्या क्रांतिक उंबरठ्याची, P_c ची, किंमत ती आग कशा प्रकारे पसरते याविषयीच्या गृहीतांवर आधारित असते. आपण असे मानूया की एक पेटलेले झाड त्याच्या सर्वांत जवळच्या शेजारी झाडांना पेटविण्यास काळाचा एक एकक अवधी घेते, आणि स्वत: दोन एकक कालावधीत जळून खाक होते. या गृहीतांनुसार P_c ची किंमत

येते साधारण 0.593 इतकी. आग जर सर्वात जवळच्याच नव्हे तर त्यापलीकडील दुसऱ्या स्थानांवरील झाडांनाही पेटवण्याइतपत तेज असेल तर साहजिकच झिरपण्याचा क्रांतिक उंबरठा खाली येतो.

या क्रांतिक उंबरठ्याच्या जवळपास असताना झिरपण प्रक्रियेतील बरीचशी चले साध्या घातांक नियमांनुसार बदलतात; आणि हे घातांक त्या विशिष्ट प्रश्नाच्या संदर्भावर अवलंबून नसतात, तर सर्वसाधारण लक्षणांवर (उदा. अवकाशाची मिती, मुक्तता कोटी) आधारित असतात. चौरस जाळीदार मांडणीत अवकाशाची मिती असते दोन, आणि अरण्यातील वणव्याच्या उदाहरणात झाडे एक तर पेटलेली वा बिनपेटलेली असतात, म्हणजे मुक्तता कोटीही असते दोन. वैश्विक स्वरूपाचे घातांक असलेले व मापप्रमाण बदलात अचल राहणारे नियम अवस्था रूपांतराच्या (phase transition) शास्त्रात सर्रास आढळतात.



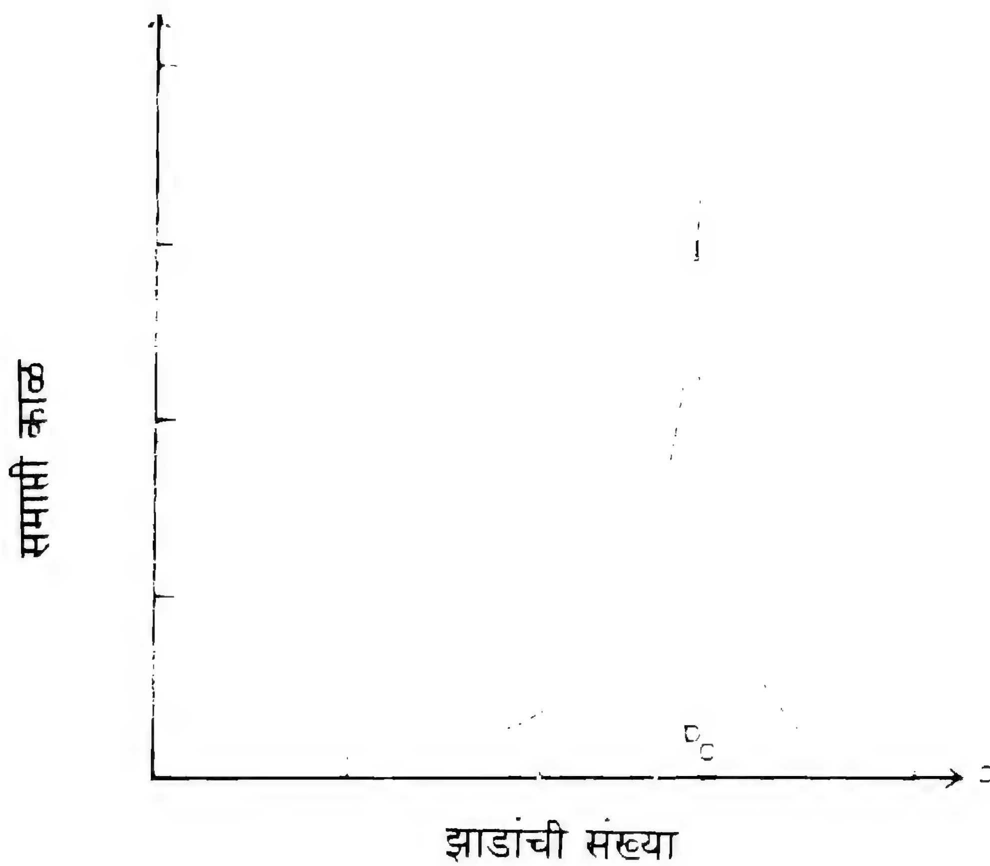
आकृती 13.8 : वणव्याच्या सरासरी आघाडीच्या स्थितीत वेळेनुसार होणारा बदल.



आकृती 13.9 : वणव्यातील जळलेल्या झाडांच्या संख्येत वेळेनुसार होणारा बदल.

आपण जर आगीच्या आघाडीची स्थिती वेळेनुसार कशी बदलते हे दाखविणारा आलेख काढला तर त्यातून घातांक नियमाचे अस्तित्व कळून येते. लॉग-लॉग आलेख एक सरळ रेषा असते व तिचा उतार सुमारे 0.9 म्हणजे नेहमीच्या अभिसरण प्रक्रियेत आढळणाऱ्या किमतीपेक्षा बराच अधिक आढळतो. (आकृती 13.8 व 13.9)

याच प्रकारे जळलेल्या झाडांची संख्या व वेळ यांच्यात लॉग-लॉग आलेख काढल्यास सुमारे 0.8 उतार असलेली सरळ रेषा येते. या आगीची समाप्ती होण्यास लागणाऱ्या



आकृती 13.10 : वणव्याचा समाप्तीकाल आणि संभाव्यता, P, यांचा आलेख.

कालावधीसंबंधी एक महत्त्वाची गोष्टही नोंदली पाहिजे. जेव्हा P ची किंमत P_c पेक्षा खूप कमी वा खूप जास्त असते तेव्हा आग लवकर संपते. (एक तर आग लवकर विझते वा पूर्ण अरण्याला चटकन वेढून बेचिराख करते). क्रांतिक उंबरठ्याजवळ मात्र आगीचा समाप्तीकाळ खूपच वाढतो, आलेखात एक उंच शिखर दिसून येते (आकृती 13.10). ऊष्मागतिकीतील नेहमीच्या अवस्था रूपांतरांतही या प्रकारची वैशिष्ट्ये आढळतात.

क्रांतिक उंबरठ्याजवळील झरणक्रियेचे अपूर्णांमित स्वरूप स्पष्ट दिसून येते ते जळलेल्या झाडांची संख्या, N, मोजल्यावर. आपण या उंबरठ्यापासून दूर असतो तेव्हा N ही संख्या त्या जाळीदार मांडणीच्या क्षेत्रफळाच्या प्रमाणात असते, $N \propto L^2$, - मग ती आग लवकर विझणारी असो वा पूर्ण अरण्य भस्मसात करणारी असो. आणि हे नेहमीच्या युक्लिडीय भूमितीनुसार अपेक्षितच आहे. मात्र झरणक्रियेच्या उंबरठ्यावर हा संबंध बदलून $N \propto L^D$ असा होतो. D हा साधारण 1.9 किंमत असणारा अपूर्णांक असतो. आग पुढे पसरत असताना मागे काही झाडे न जळता टिकून राहिलेली असतात. त्यांच्या सभोवतीच्या बिनजळलेल्या मोकळ्या जागांच्या क्षेत्रफळामुळेच D ची किंमत 2 पेक्षा कमी येते. या

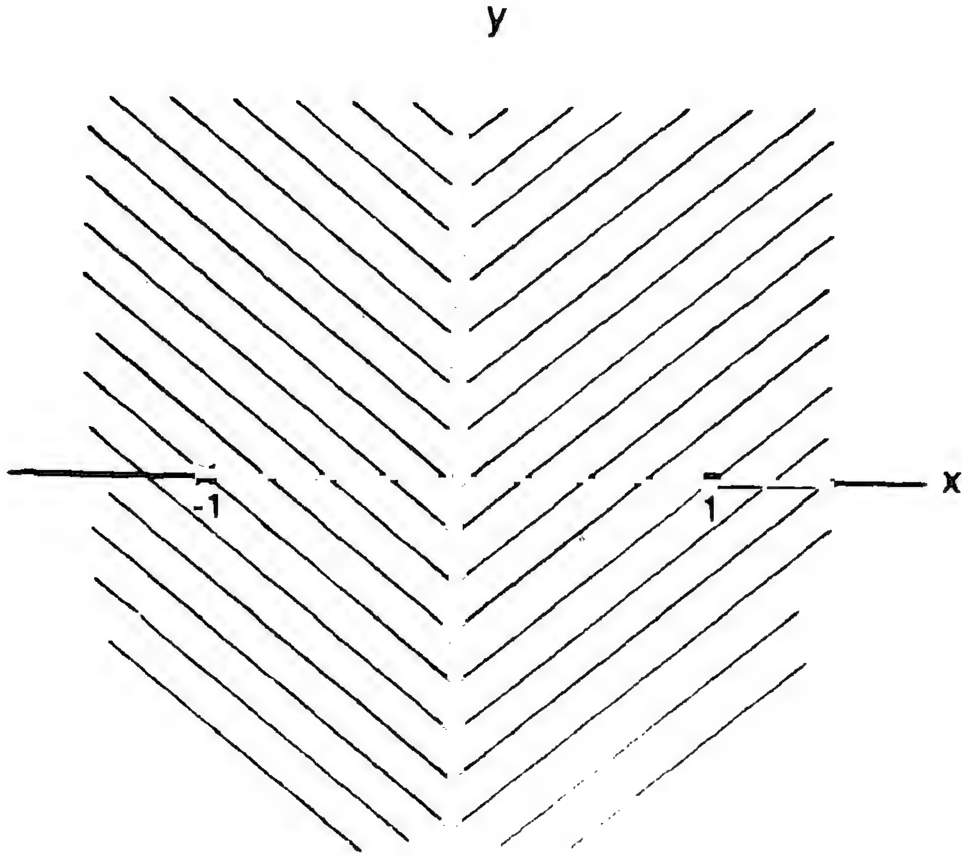
मोकळ्या राहिलेल्या, न जळलेल्या जागांची संरचना स्वैर स्वरूपाची नसते; ती वेगवेगळ्या मापप्रमाणांत स्वयं-समरूप असते. पसरत जाणाऱ्या आगीची आघाडीसुद्धा 1 व 2 दरम्यान मिती असलेला अपूर्णमित असतो. या महत्त्वाच्या प्रक्रियेचा अधिक तपशील संदर्भ क्रमांक 21 मध्ये पाहावयास मिळेल.

आकर्षणपात्रे

प्रकरण 12 मध्ये आपण संहतीतील 'कर्षका' ची ओळख करून घेतली. एखाद्या संहतीत जर एकापेक्षा अधिक कर्षक असले तर प्रत्येक कर्षक आपल्याभोवतीच्या विशिष्ट क्षेत्रातील बिंदू स्वत:कडे ओढून घेतो. अशा क्षेत्राला त्या कर्षकाचे आकर्षणपात्र म्हटले जाते. मात्र या आकर्षणपात्रांच्या सीमा नेहमीच साध्यासोप्या, जोडलेल्या रेषाखंडांच्या वा पृष्ठभागांच्या स्वरूपात नसतात. त्या सीमा अपूर्णमितही असू शकतात. भौतिक संहतींच्या बाबत हे घडतेच, परंतु गणिती क्षेत्रातही ही गोष्ट नजरेस येते. उदाहरणार्थ न्यूटनची पुनरावृत्ती पद्धत वापरून जेव्हा आपण घन वा अधिक घातांकाची समीकरणे सोडवितो तेव्हा हे वैशिष्ट्य चांगल्या प्रकारे नजरेस येते. न्यूटनच्या पद्धतीची प्रक्रिया तशी साधी आहे. सुरुवातीस आपण त्या समीकरणाच्या उत्तराचा अंदाज बांधतो, आणि मग या पद्धतीने ठरवून दिलेले रूपांतर करून पहिल्यापेक्षा अधिक चांगले, प्रत्यक्ष उत्तराच्या अधिक जवळ जाणारे उत्तर मिळवितो. हे नवे उत्तर पुढील पुनरावृत्तीसाठी इनपुट म्हणून वापरून अधिक चांगले उत्तर मिळवितो. अशा एकापाठोपाठ पुनरावृत्ती केल्यावर आपण त्या समीकरणाच्या प्रत्यक्ष उत्तराजवळ पोहोचतो.

समजा $Z^2 = 1$ हे समीकरण आपण या पद्धतीने सोडवायला घेतले. या समीकरणाची $Z = \pm 1$ ही दोन उत्तरे आहेत हे आपणास माहीतच आहे. न्यूटनच्या पद्धतीनुसार या समीकरणाबाबत वापरायचे पुनरावृत्ती सूत्र आहे $Z_{n+1} = (Z_n^2+1)/2Z_n$. आपण सुरुवातीचा अंदाज करूया $Z_0 = 0.6$, आणि मग एकापाठोपाठच्या पुनरावृत्तीतून उत्तरे येत जातात $Z_1 = 1.13$, $Z_2 = 1.007$, $Z_3 = 1.00002$. आपण $Z = +1$ या उत्तराजवळ पोहोचतोय हे स्पष्टच दिसून येतेय. याच प्रकारे आपण जर $Z_0 = -0.5$ पासून सुरुवात केली तर पुनरावृत्ती आपल्याला $Z = -1$ या उत्तराजवळ आणून सोडते.

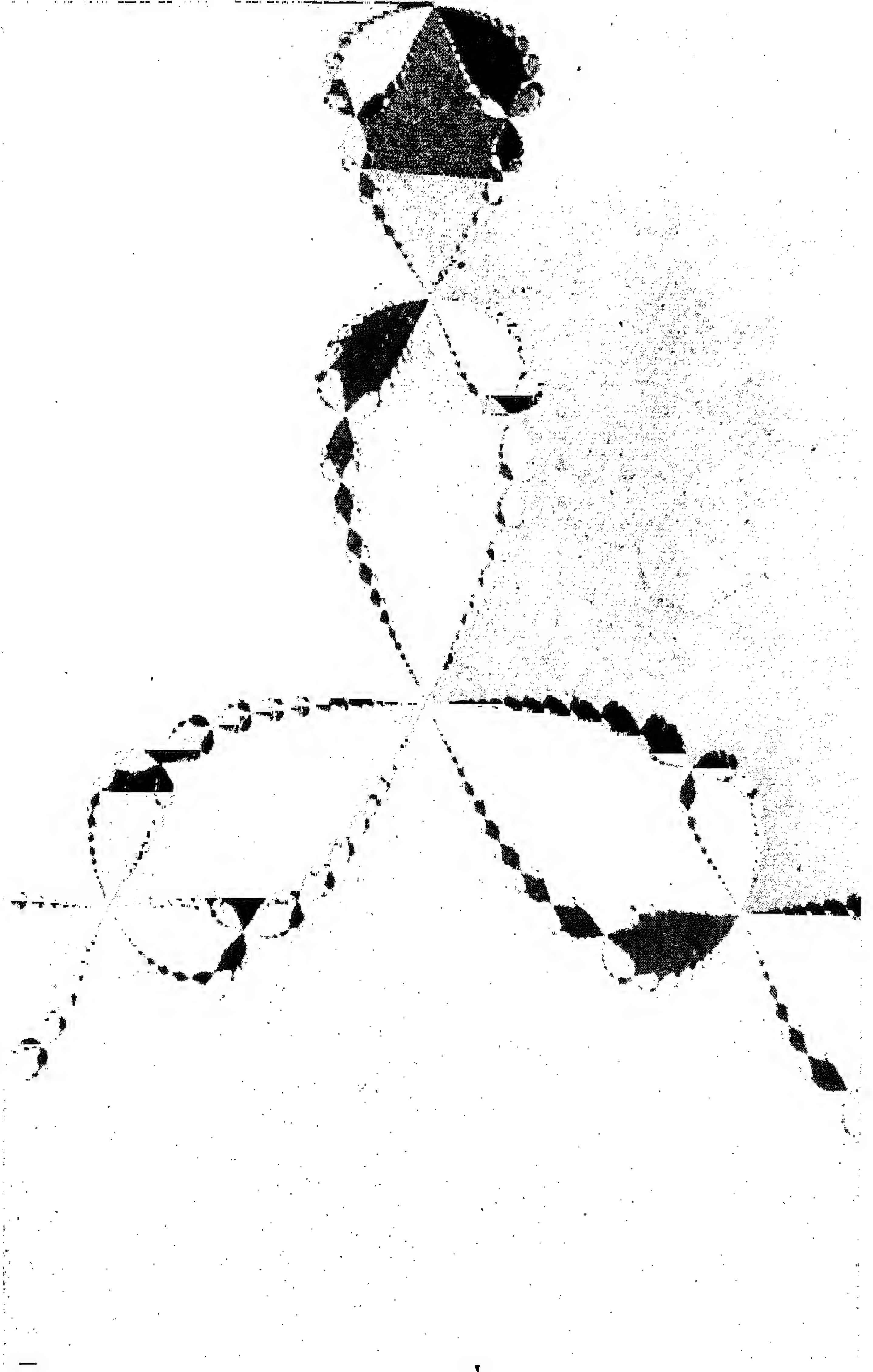
परंतु बीजगणितीय समीकरणांची उत्तरे नेहमीच काही सत्‌संख्या (real numbers) नसतात - ती सदसत् संख्या (complex numbers) असू शकतात. सदसत् संख्या $x + iy$ अशी लिहिली जाते - येथे x आणि y या सत्‌संख्या असून i (आयोटा) म्हणजे $\sqrt{-1}$ ही संख्या सत्‌संख्यांच्या सटाबाहेरची आहे, कारण ऋण संख्येचे वर्गमूळ कधीच सत्‌संख्या असू शकत नाही. x आणि y या सदसत्‌संख्येच्या घटकांना सत् घटक व असत् (कल्पित) घटक असे संबोधले जाते. एका प्रतलावर आपण या दोन घटकांची आलेखीय मांडणी करू शकतो. या सदसत् प्रतलावरील (complex plane) प्रत्येक बिंदूचे x आणि y हे दोन घटक असतात व ते $x + iy$ ही एक विशिष्ट, एकमेवाद्वितीय सदसत् संख्या निश्चित करतात. $Z^2 = 1$ या समीकरणाबाबत या सदसत् प्रतलातील सत् घटक धन असणारे $(x > 0)$ सर्व बिंदू



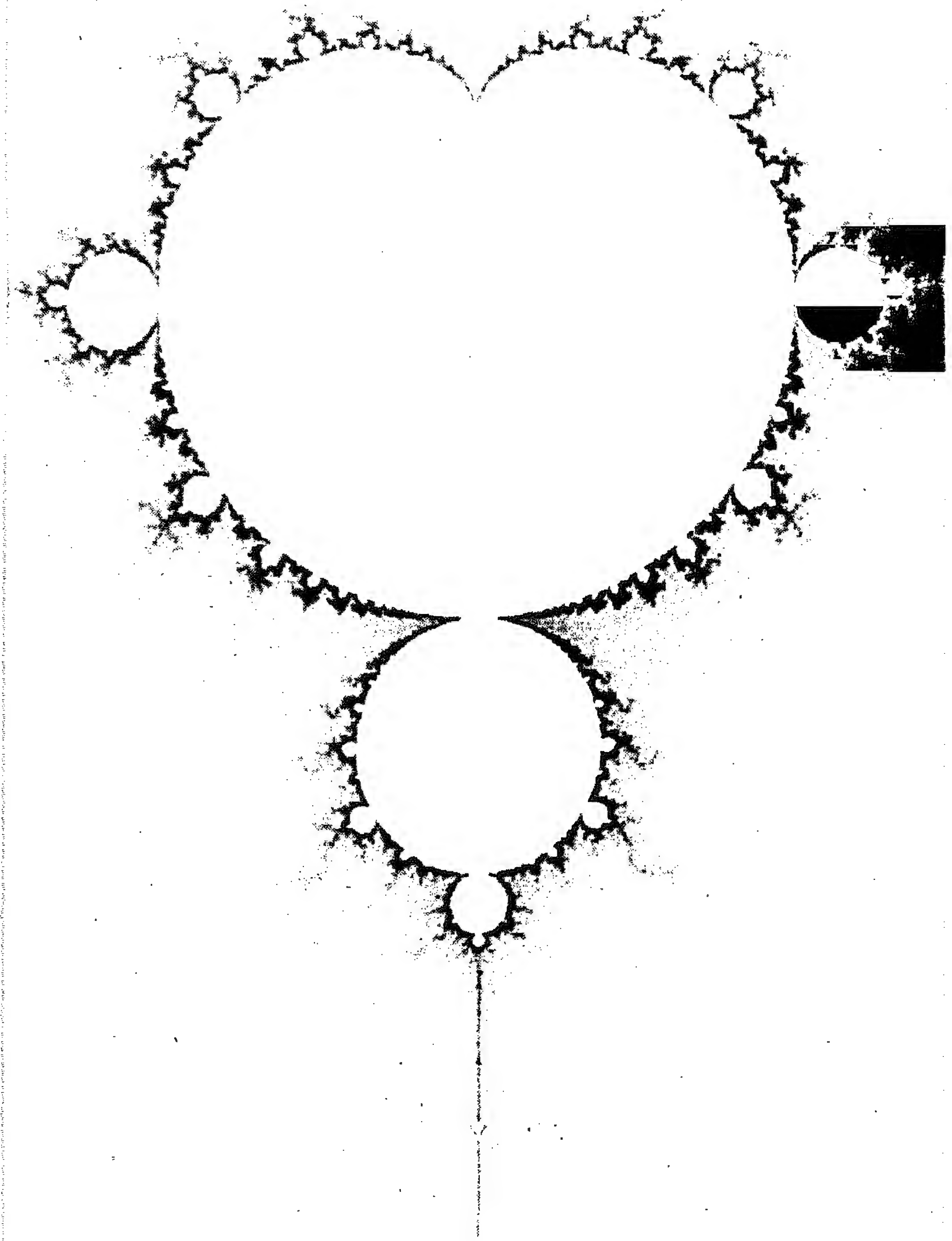
आकृती 13.11 : $Z^2 = 1$ हे समीकरण न्यूटनच्या पद्धतीने सोडविताना : $Z = \pm 1$ या दोन कर्षकांची आकर्षणपात्रे.

$Z = +1$ या उत्तराकडे खेचले जातात, आणि सत् घटक ऋण असणारे ($x < 0$) सर्व बिंदू $Z = -1$ या उत्तराच्या दिशेने आकर्षिले जातात. अशा प्रकारे या समीकरणासंबंधात सदसत् प्रतल दोन आकर्षणपात्रांमध्ये व्यवस्थित दुभागला जातो, आणि $Z = +1$ व $Z = -1$ हे दोन कर्षक या पात्रांमध्ये कार्यरत असतात. $x = 0$ म्हणजे y अक्ष (या सदसत् प्रतलाचा असत् अक्ष) ही या दोन आकर्षणपात्रांतील सीमारेषा असते. (आकृती 13.11)

आपण जर पुढे जाऊन $Z^3 = 1$ हे घन समीकरण वरील पुनरावृत्ती पद्धतीने सोडवायचा प्रयत्न केला तर मात्र परिस्थिती वरच्यासारखी व्यवस्थित व नीटनेटकी राहत नाही. येथेही या समीकरणाची मूळे ज्ञात आहेत. ही तीन घनमूळे आहेत 1 आणि $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$. हे या गणितीय संहतीचे तीन कर्षक आहेत. यांची आकर्षणपात्रे कोणती ? आधीच्या उदाहणावरून घेतलेली आपली अंत:प्रेरणा सांगते की या वेळी सदसत् प्रतल तीन भागांत विभागला जाईल. परंतु ही अंत:प्रेरणा पूर्ण चुकीची ठरते. प्रत्येक घनमूळाजवळील म्हणजे कर्षकाजवळील प्रतलाचा भाग घेतला तर त्यातील बिंदू न्यूटनच्या पद्धतीनुसार पुनरावृत्ती केल्यावर त्या कर्षकाकडेच आकर्षिले जातात. परंतु आकर्षणपात्रांमधील सीमेजवळ मात्र गूढ, तऱ्हेवाईक वागणूक आढळात येते. असे लक्षात येते की कोणत्याही दोन शेजारील पात्रांमध्ये जोडलेली अशी सीमाच नाही. एखादा बिंदू जर पुनरावृत्तीनंतर पहिल्या कर्षकाकडे खेचला जात असेल, तर त्याजवळचाच दुसरा एखादा बिंदू दुसऱ्या कर्षकाकडे आकर्षिला जात असतो, आणि या दोन बिंदूंमध्ये नेहमीच एक बिंदू असा असतो की तो पुनरावृत्तीनंतर तिसऱ्या कर्षकाच्या दिशेने सरकतो. आणि कितीही सूक्ष्म प्रमाणावर आपण गेलो तरीही हे घडतेच. सीमा जर रेषाखंडांच्या स्वरूपाच्या असतील तर ही विचित्र गोष्ट शक्यच होणार



आकृती 13.12 : $Z^3 = 1$ हे समीकरण न्यूटनच्या पद्धतीने सोडविताना मिळणाऱ्या अपूर्णमित सीमा (मॅनफ्रेड आर्. श्योडर, ग्योटिंगन विद्यापीठ यांच्या सौजन्याने).



आकृती 13.13 : मॅन्डेलब्रॉट सट (मॅनफ्रेड आर्. श्योडर, ग्योटिंगन विद्यापीठ यांच्या सौजन्याने).

नाही. ह्या सीमाप्रदेशातील जे एकमेकांशी न जुळलेले बिंदू असतात ते अपूर्णमित असतात आणि त्या बिंदूंच्या सटाला ज्यूलिआ सट असे म्हणतात. (आकृती 13.12).

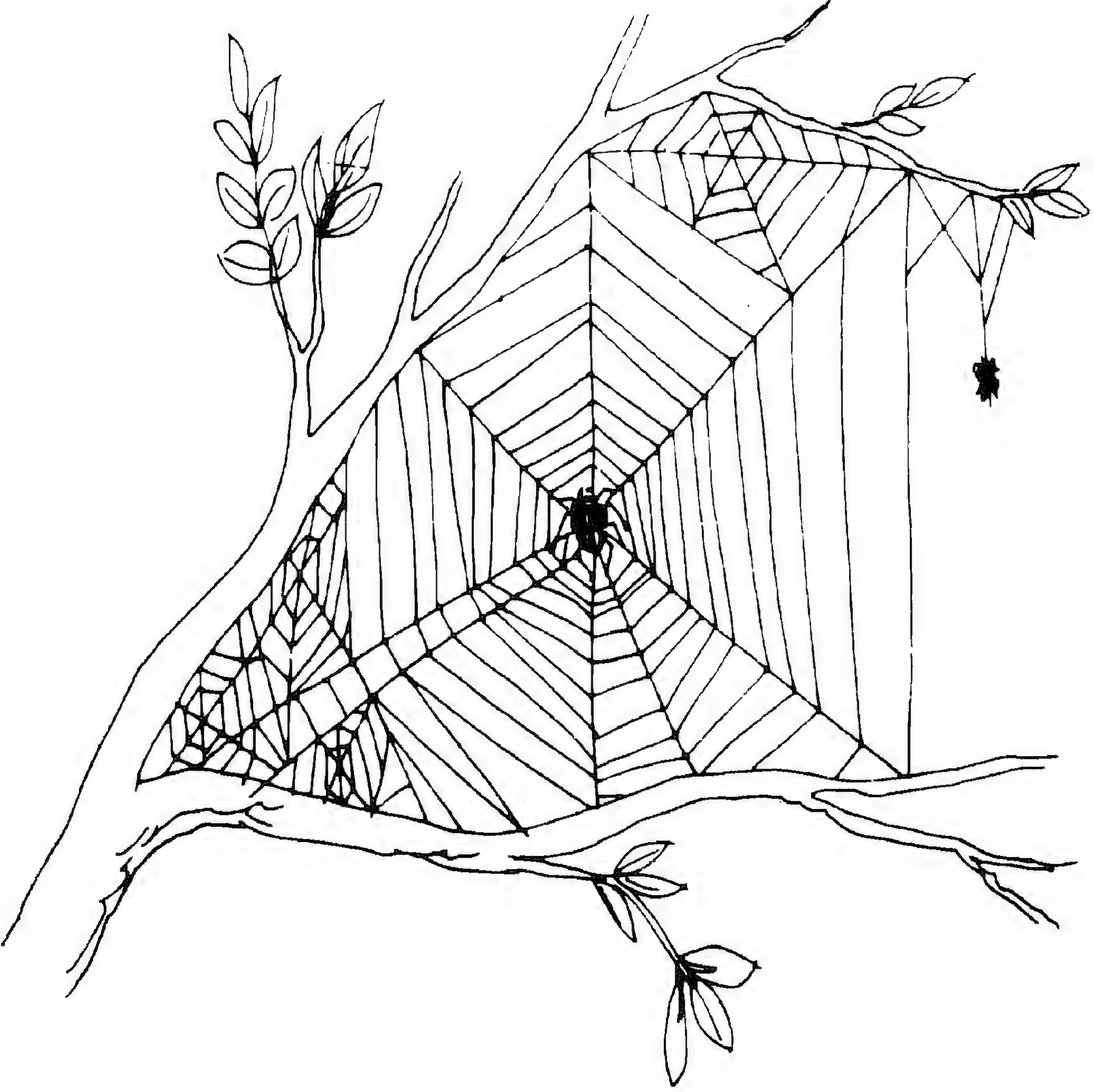
अपूर्णमितांच्या विषयाशी संबंधित सर्वात प्रसिद्ध चीज म्हणजे मॅन्डेलब्रॉट सट. या सटामुळे विविध सौंदर्यपूर्ण आकार निर्माण होतात. त्यांचे आकर्षण या विषयाला जगभर प्रसिद्धी मिळवून देण्यास कारणीभूत झाले आहे. हा सट निर्माण केला जातो एक तसा साधाच पुनरावृत्तीचा नियम वापरून : $Z = Z^2 + C$ (येथे C सदसत् संख्या असून ती ह्या सटाची सदस्य आहे की नाही हे आपल्याला तपासायचे असते). सुरुवात करताना आपण समीकरणाच्या उजवीकडे $Z = 0$ घेतो, आणि आपल्याला मिळतो $Z = C$. नंतरच्या पुनरावृत्तीत Z ची किंमत होते $C^2 + C$. अशा प्रकारे पुनरावृत्ती करत गेल्यावर जर तो बिंदू उगमबिंदूपासून ($Z=0$) खूप दूर गेला तर C ही संख्या त्या सटाची सदस्य नसते. आणि जर तो बिंदू उगमबिंदूभोवतीच जखडून राहिला तर मात्र C त्या सटाची सदस्य असते. त्या सटाचे स्वरूप असते : एक मध्यवर्ती बेट व त्याच्या परिघावर चिकटलेल्या अनेक तबकड्या. सटाचे भाग असलेले व भाग नसलेले विभाग वेगवेगळ्या रंगछटांनी रंगविले तर विलक्षण सुंदर रचना तयार होतात. हा सट पूर्णांशाने स्वयं-समरूप नसतो. सटाचा काही भाग मोठा केला, त्याचे विशालन केले तर तो जवळपास मूळ सटासारखाच दिसतो. मात्र जसजसे विशालन वाढवत जावे तसतशा प्रत्येक पातळीवर नवनवीन रचना दृष्टीस पडू लागतात. या सटात दडलेली व्यामिश्रता आणि रचनेतील वैविध्य अक्षरशः चक्रावून सोडणारे आहे.

गणितीय अपूर्णमित आकारांना कलात्मक रंगसंगती व जुळणी यांची जोड मिळते तेव्हा अपार सुंदर अशा एका नव्या अपूर्णमित कलेचा जन्म होतो. पुस्तके, दिनदर्शिका, आणि विशेषतः चित्रपट या माध्यमांद्वारे पसरलेल्या अपूर्णमित कलेने आता अनेक देशांतील लोकांच्या कल्पनाशक्तीला खतपाणी घातले आहे. गणिती संशोधन आणि कलात्मक कल्पनाशक्ती एकसाथ फार क्वचित आढळतात. अशा या अपवादात्मक मानवी कार्याचे दर्शन आपल्याला येथे घडून येते.

कोलाहल व अपूर्णमित यातील ही व अन्य उदाहरणे अभ्यासण्यासाठी संदर्भ 2 व 21 महत्त्वाचे आहेत. शिवाय संदर्भ 4 व 5 हेही पाहा.

भाग चौथा

स्वयं-संघटन



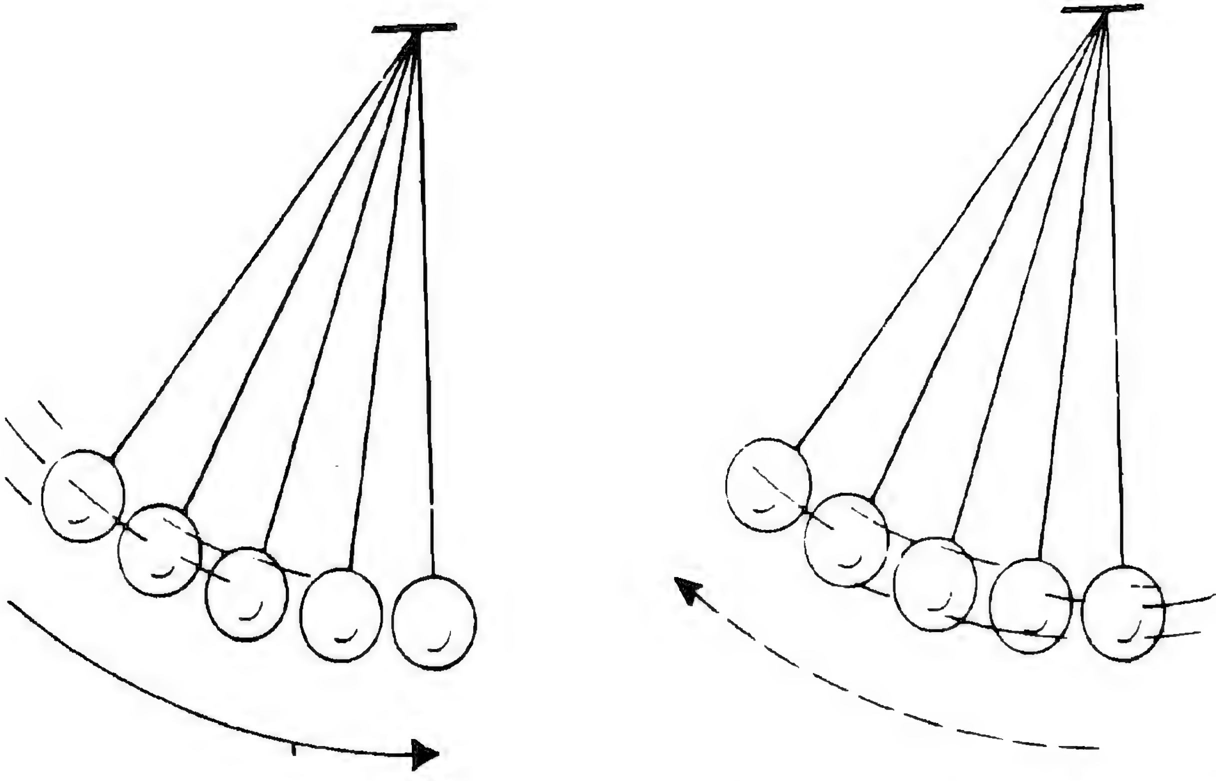
चौदा

ऊष्मागतिकीय कालबाण

न्यूटनीय स्थितीगतिशास्त्राच्या नियमांत 'कालबाण' नाही. म्हणजे कालप्रवाह फक्त एकाच दिशेने वाहतो असे अध्याहृत नाही. कालप्रवाह दोन्ही दिशांनी वाहू शकतो. याचा अर्थ असा की भूत आणि भविष्य यांच्यात अंगभूत असा स्वाभाविक फरक नाही. हे नियम ज्या प्रक्रियांना लागू पडतात त्या प्रतिक्रमी व प्रत्यावर्तनीय असतात - म्हणजेच उलट-सुलट दोन्ही प्रकारे घडू शकतात. अनवमंदित लंबकाचे हेलकावणे ही प्रत्यावर्तनीय क्रिया आहे. या हालचालीची चित्रफीत काढली व ती पडद्यावर उलटी फिरताना बघितली तर काहीच अनपेक्षित वा विचित्र जाणवणार नाही. पडद्यावर लंबकाच्या हालचालीतील प्रत्येक बिंदूची गती उलट फिरलेली असते. प्रत्यक्षात नंतर होणारी हालचाल पडद्यावर आधी होते आणि आधीची नंतर दिसते. म्हणजेच 'भविष्यकाळ' बनतो 'भूतकाळ' आणि 'भूतकाळ' बनतो 'भविष्य'! परंतु पडद्यावर दिसणारी लंबकाची हालचाल ही पूर्णत: शक्यतेच्या कोटीतील असते. ही गोष्ट इतर अनेक उदाहरणांनाही लागू पडते. समजा दोन मुले चेंडूने खेळत आहेत. एकाने फेकलेला चेंडू काही अंतरावर उभा असलेला दुसरा झेलतो. अवमंदन आणि वाऱ्याचे इतर परिणाम जर दुर्लक्षणीय असतील तर ही क्रिया प्रत्यावर्तनीय आहे. उलट फेकही पूर्णपणे नियमानुसार घडते. दुसऱ्या मुलाने फेकलेला चेंडू बरोबर त्याच मार्गाने पहिल्या मुलाच्या हाती येतो. कालदिशा उलट फिरविल्यावर दिसून येणारी ही अचलता स्थितीगतिशास्त्रापुरतीच मर्यादित नाही. मॅक्सवेलच्या प्रसिद्ध समीकरणांतून वर्णिले जाणारे विद्युत व चुंबकीय शास्त्रांचे नियमही कालप्रत्यावर्तनीय आहेत. आपण अणू-रेणूंच्या पातळीवर गेलो की जुन्या न्यूटनीय भौतिकीची जागा पुंजयांत्रिकी सिद्धान्त घेतो. परंतु आमूलाग्र वेगळ्याच स्वरूपाच्या या पुंजयांत्रिकीच्या राज्यातही कालप्रत्यावर्तनीय अचलता टिकून आहे. वेगळ्या शब्दांत सांगायचे तर आजामितीस ज्ञात असलेल्या भौतिकीतील मूलभूत नियमांत 'भूत' आणि 'भविष्य' यांची निश्चित व्याख्या करण्याची क्षमता नाही.*

---

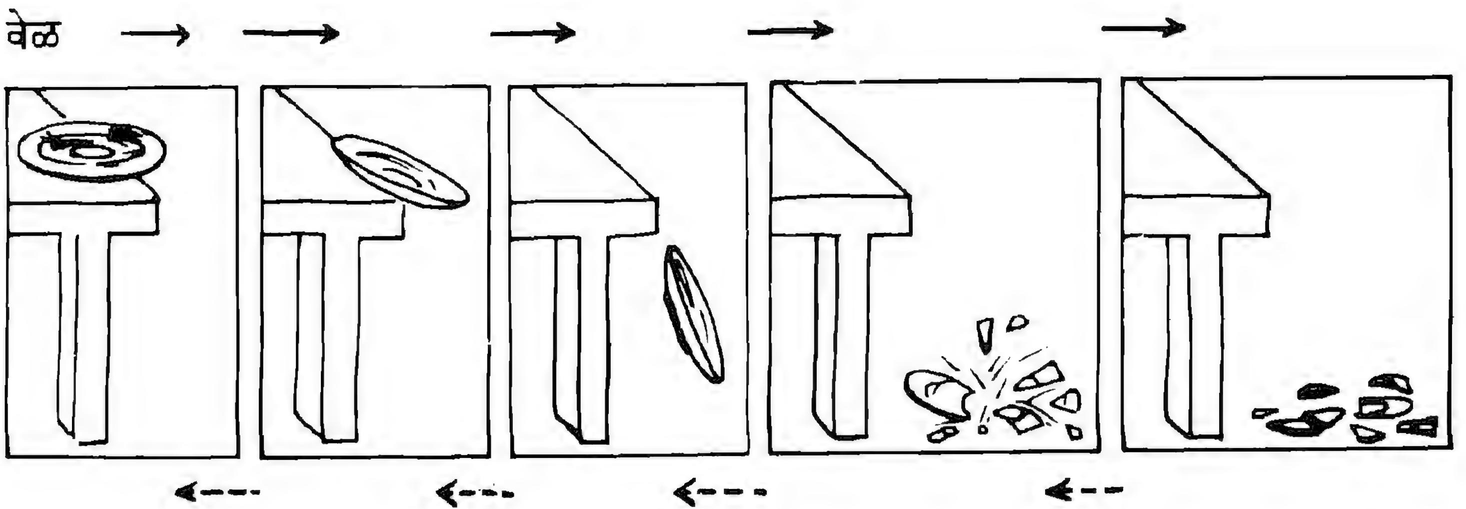
* मूलकणांसंबंधी काही प्रक्रियांत कालप्रत्यावर्तनीय अचलता पाळली जात नाही; परंतु स्थूल पातळीवर या प्रक्रिया महत्त्वाच्या नाहीत.



आकृती 14.1 : अनवमंदित लंबकाची हालचाल प्रत्यावर्तनीय असते. या हालचालीची चित्रफीत उलटी चालविल्यास काहीही विचित्र जाणवत नाही - ती हालचालही लंबकाच्या नेहमीच्या हालचालीसारखीच असते.

हे वाक्य प्रथमच ऐकणाऱ्याला फारच धक्कादायक वाटणे साहजिकच आहे. कारण आपल्या कालविषयक सर्वात प्राथमिक अनुभवाला छेद देणारे हे वाक्य आहे. हा अनुभव म्हणजे काळाचा एकाच दिशेने वाहणारा प्रवाह - भूत ते वर्तमान ते भविष्य असा. भूत आणि भविष्य यातील फरक आपल्या जाणिवेत इतका खोलवर रुजलेला आहे की निसर्गातील मूलभूत नियम या फरकाची दखल घेत नाहीत यावर आपला विश्वास बसणेच कठीण होते. परंतु आपली जाणीव ज्या अर्थी निसर्गाच्या वस्तुनिष्ठ गुणधर्मांवर आधारित असते त्या अर्थी भूत आणि भविष्य यात फरक करणाऱ्या, अप्रत्यावर्तनीय अशा निसर्गक्रिया अस्तित्वात असल्याच पाहिजेत.

आपल्याभोवती सदासर्वकाळ अप्रत्यावर्तनीय प्रक्रिया घडत असतात हे आपल्या लक्षात येण्यास फार वेळ लागत नाही. टेबलाच्या कडेवरून एक बशी खाली पडते व



आकृती 14.2 : टेबलाच्या कडेवरून पडून फुटणारी व उष्णता निर्माण करणारी बशी. ही 'कालबाण' असलेली अप्रत्यावर्तनीय प्रक्रिया आहे. तुटक बाणांनी दाखविलेली उलट प्रक्रिया अशक्य आहे.

जमिनीवर आपटून खळकन फुटते. आवाज होतो, तो अखेर सभोवतालच्या भिंतींत वगैरे शोषला जातो; जमिनीवर आणि त्या बशीच्या तुकड्यांत थोडी उष्णताही निर्माण होते. या घटनेची चित्रफीत जर उलटी बघितली तर ती फारच अशक्यप्राय असल्याचे लक्षात येईल : विखुरलेले तुकडे एकत्र येऊन पूर्ण बशी तयार होते, आणि ती उडी मारून टेबलाच्या कडेवर जाऊन बसते. ही कालप्रत्यावर्तन घटना ऊर्जाअक्षय्यतेचा नियम मोडत नाही, कारण आपण असे म्हणू शकतो की बशीला सांधून घेऊन टेबलावर उडी मारण्यास पुरेल इतकी ऊर्जा उष्णतास्वरूपात जमीन व भिंती बाहेर टाकतात. परंतु असे घडलेले काही अजूनपर्यंत कोणी बघितलेले नाही. मूळची घटना म्हणजे बशी टेबलाच्याकडे वरून पडून फुटणे ही उघडच अप्रत्यावर्तनीय आहे. या घटनेचा एक निश्चित भूतकाळ तसेच भविष्यकाळ आहे, व या दोघांची अदलाबदल होऊ शकत नाही. या घटनेशी कालबाण जोडलेला आहे.

निसर्गातील स्वयंस्फूर्त प्रक्रिया बहुतांशी अप्रत्यावर्तनीय आढळतात. स्वयंपाकघरातील सिलिंडरमधून चुकून गळती झालेल्या गॅसचा वास हळूहळू कमी होत जातो कारण गॅसचे हवेत अपसरण होत जाते. याउलट होणारी, प्रत्यावर्तन प्रक्रिया म्हणजे विखुरलेले वायूचे रेणू सिलिंडरजवळ एकत्र येऊन नंतर गळतीच्या छिद्रातून आत जाणे. ही शक्यता ऐकायलाही विचित्र वाटते. अप्रत्यावर्तनीय प्रक्रियांमध्ये ऱ्हास व अपसरण अंतर्भूत असते. लंबकाची हालचाल म्हणजे तर पाठ्यपुस्तकातून दिले जाणारे प्रत्यावर्तनीय प्रक्रियेचे आदर्श उदाहरण. परंतु हवेतील व आधारबिंदूजवळील घर्षण वा अन्य कोणत्याही कारणामुळे तो लंबक अवमंदित झाला की त्याची हालचाल लगेच अप्रत्यावर्तनीय होते. अवमंदित लंबक आपली ऊर्जा उष्णतेच्या रूपात भोवतालच्या वातावरणावर खर्च करून टाकून शेवटी स्थिरावतो. याउलटची प्रत्यावर्तन प्रक्रिया म्हणजे भोवतालच्या हवेतील उष्णतेमुळे स्थिर लंबकाची आंदोलने सुरू होणे. परंतु हे काही कधीही घडलेले नाही. ऱ्हास होणे हे सार्वत्रिक असल्याने निसर्गात अप्रत्यावर्तनीय प्रक्रिया सर्रास आढळतात. याउलट प्रत्यावर्तनीय प्रक्रिया घडून येण्यासाठी अतिशय काटेकोरपणे नियंत्रित केलेली परिस्थिती अत्यावश्यक असते व अशा प्रक्रिया फार विरळाच असतात.

येथे आपण एक प्रकारच्या संकल्पनात्मक गुंत्यात अडकतो. निसर्गातील मूलभूत नियमांत कालबाण आढळत नाही. परंतु याच नियमांनी नियंत्रित केलेल्या नैसर्गिक प्रक्रियांमध्ये मात्र कालबाण हमखास आढळून येतो. हे कोडे कसे सोडवायचे? अनेक वैज्ञानिकांनी या प्रश्नात लक्ष घातले आहे आणि ह्या कोड्याची अंतिम उकल अजूनही झालेली नाही. परंतु गेल्या शतकाच्या अखेरीस लुडविग बोल्ट्झमान या वैज्ञानिकाने आपल्या मर्मदृष्टीने या प्रश्नाच्या अंतरंगावर प्रकाश टाकला आणि त्यातूनच सांख्यिकीय स्थितीगतिशास्त्र या विषयाची पायाभरणी घडवून आणली.

बोल्ट्झमान यांची कल्पना एका सोप्या उदाहणाद्वारे आपल्या चांगली लक्षात येऊ शकते. एका वाचनालयाची कल्पना करा. यात पुस्तके एका विशिष्ट क्रमाने नीट मांडून ठेवलेली आहेत. येथे येणारे वाचक फार बेशिस्त आहेत असेही समजा. ते पुस्तके चाळताना मूळचा क्रम पार उलटापालटा करून टाकतात. परिणामी दिवसअखेर पुस्तके फळ्यांवर

अगदी स्वैरपणे, अस्ताव्यस्त विखुरलेली आढळतात. क्रमवार, नियमित सुरचना अनियमित कुरचनेत बदलून जाते. ही प्रक्रिया अप्रत्यावर्तनीय आहे हे उघडच आहे. ग्रंथपालाने जर लक्ष घातले नाही व वाचनालय वाचकांच्या हातीच सोपवून दिले तर ही विखुरलेली पुस्तके मूळच्या विशिष्ट क्रमवार मांडणीत पुन्हा रचली जाण्याची काहीच शक्यता नसते.

आता त्या विस्कळीत विखुरलेल्या पुस्तकांच्या एका *विशिष्ट* स्थितीचा विचार करा : समजा 147 वे पुस्तक क्रमांक 1 च्या जागेवर आहे, 43 वे पुस्तक क्रमांक 2 च्या जागेवर, 59 वे क्रमांक 3 च्या जागेवर वगैरे. मुळातील क्रमवार मांडणीतील पुस्तके वाचकांच्या हाताळण्यामुळे वरील विशिष्ट स्थितीत येण्याची शक्यता किती? या प्रश्नाचे उत्तर हे की ही शक्यता उलट प्रक्रियेच्या (म्हणजे विशिष्ट विस्कळीत मांडणी मूळच्या क्रमवार मांडणीवर जाण्याच्या) शक्यतेइतकीच थोडी,- प्रत्यक्षात जवळजवळ नगण्यच, असते. पुस्तकांची सरमिसळ होण्याचे जे नियम असतात ते कोणत्याही एका विशिष्ट स्थितीच्या पारड्यात आपले वजन टाकत नसतात हे आपण समजून घेतले पाहिजे. पुस्तके स्वैरपणे विखुरली तर त्या संग्रहाच्या प्रत्येक स्थितीची शक्यता एकसारखीच असते. याचाच अर्थ असा की पुस्तकांची क्रमवार मांडणीची स्थिती आणि विस्कळीत विखुरलेल्या पुस्तकांची *कोणतीही* एक विशिष्ट स्थिती यांची शक्यता सारखीच असते. मग आपल्याला अप्रत्यावर्तनीयता का आढळते? सुव्यवस्था सहज अव्यवस्थेत रूपांतरित होते, पण अव्यवस्था कधीच सुव्यवस्थेत परत येत नाही, असे का? याचे कारण आहे : 'अव्यवस्था' म्हणून ओळखल्या जाणाऱ्या अगणित रचना त्या वाचनालयाच्या असतात, परंतु जिला 'सुव्यवस्था' म्हटले जाते ती रचना मात्र एकमेवच असते.

या दृष्टीने पाहिले तर आइन्स्टाइन यांनी एकदा म्हटल्याप्रमाणे अप्रत्यावर्तनीयता हा एक भ्रम आहे. वाचनालयातील पुस्तकांची सरमिसळ होण्याच्या नियमांत काही अप्रत्यावर्तनीयता अंगभूत नाही. आपण अव्यवस्था फक्त स्थूल स्वरूपात बघतो आणि तिच्या 'सूक्ष्म' पातळीवरील तपशिलात जाण्याचे नाकारतो. केवळ यामुळेच या नियमांतून अप्रत्यावर्तनीयता निर्माण झाल्याचे भासते. स्थूलमानातील अव्यवस्था ही सूक्ष्मपातळीवर मोठ्या संख्येने असणाऱ्या स्थितींशी निगडित आहे, आणि त्यामुळेच ती मोठ्या प्रमाणावर आढळते. परिणामी सूक्ष्मपातळीवरील मूलभूत नियम प्रत्यावर्तनीय असूनही स्थूलपातळीवरील मात्र आपल्याला अप्रत्यावर्तनीयता आढळते.

बशी खाली पडून तिचे तुकडे होण्याचे उदाहरण आपण वरील विवेचनाच्या संदर्भात पाहूया. वाचनालयातील पुस्तकांच्या ऐवजी इतस्तत: विखुरणारे बशीचे छोटे तुकडे विचारात घ्या. 'अखंड बशी' ही स्थिती या तुकड्यांची सुव्यवस्थित रचना असणारी एक मांडणी आहे, 'फुटलेली बशी' काही फक्त एकच स्थिती दर्शवीत नाही. बशी अनेक प्रकारे फोडता येते हे प्रत्येक आईस व तिच्या छोट्या मुलामुलीस माहीत असतेच. हे ज्ञान त्या बालकांना जेवढे आनंददायी असते तितकेच ते मातेस भीतिदायक वाटते ही गोष्ट अलाहिदा! तुकड्यांच्या असंख्य वेगवेगळ्या मांडण्या 'फुटलेली बशी' या सदरातच मोडतात. परिणामी, 'अखंड बशी' या 'फुटलेल्या बशी' च्या *कोणत्याही* एका मांडणीत जाण्याची शक्यता खूपच









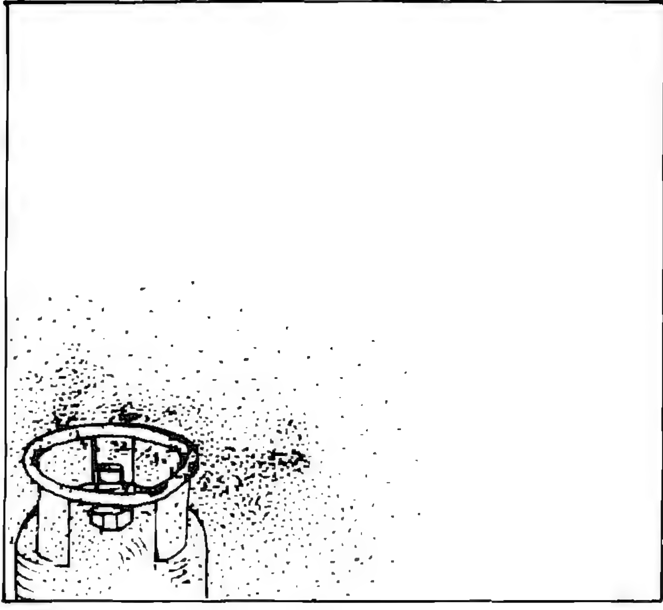
आकृती 14.3 : वाचकांच्या बेशिस्त हाताळणीमुळे अस्ताव्यस्त स्थितीत असलेले वाचनालय. सरमिसळीचे नियम कोणत्याही एका विशिष्ट स्थितीच्या बाजूचे नसतात. परंतु सुव्यवस्थेकडून अव्यवस्थेकडे असा प्रवास होतो, कारण सुव्यवस्थेची स्थिती एकच असते तर 'अव्यवस्था' म्हणून ओळखल्या जाणाऱ्या स्थिती असंख्य असतात.

मोठी असते, परंतु एका विशिष्ट फुटलेल्या बशीच्या मांडणीतून अखंड बशीच्या मांडणीत परत येण्याची शक्यता फारच कमी असते.

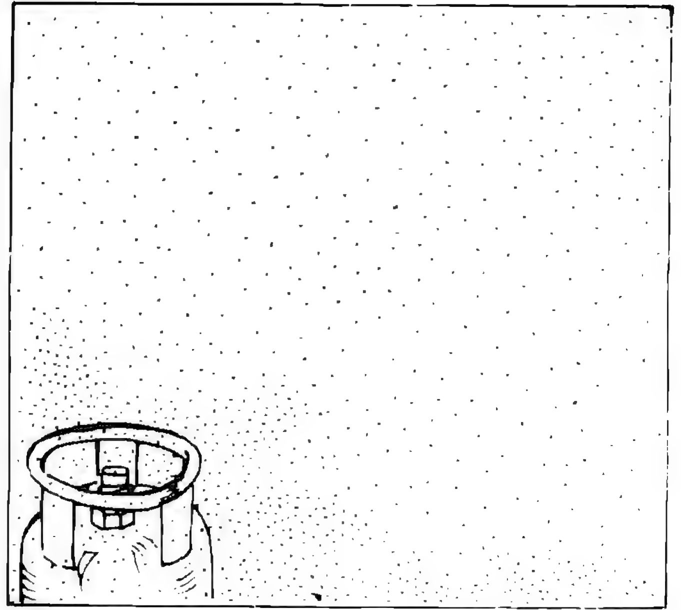
ही मूलभूत कल्पना अधिक काटेकोर वैज्ञानिक परिभाषेतही मांडता येईल. 'तुकड्यांच्या' ऐवजी आपण बशीतील रेणूंचा विचार करू. सर्व रेणूंची संरचना व स्थिती-गती वर्णन केल्यास बशीची सूक्ष्म पातळीवरील स्थिती निश्चित होते. आपल्या दृष्टीस पडते ती बशीची स्थूल पातळीवरील स्थिती असते. 'अखंड बशी' आणि 'फुटलेली बशी' हे स्थितिवर्णन स्थूलपातळीवरील आहे. सूक्ष्मपातळीवरील असंख्य मांडण्या (म्हणजे असंख्य स्थिती) स्थूलपातळीवरील एकच स्थिती दर्शवितात. सूक्ष्मपातळीवरील प्रत्येक मांडणीची वा स्थितीची शक्यता एकसारखीच असते. एका सूक्ष्मस्थितीतून दुसऱ्या सूक्ष्मस्थितीत होणारे रूपांतर प्रत्यावर्तनीय असते. परंतु सुव्यवस्थित स्थूलस्थिती (अखंड बशी) दर्शविणाऱ्या जितक्या सूक्ष्मस्थितीय मांडण्या असतात त्यापेक्षा कितीतरी अधिक पट सूक्ष्मस्थितीय मांडण्या अव्यवस्थित स्थूलस्थिती (फुटलेली बशी) दर्शविणाऱ्या असतात. परिणामी सुव्यवस्था ते अव्यवस्था ह्या रूपांतराची शक्यता उलट रूपांतरापेक्षा कितीतरी अधिक असते. रेणूंमधील आंतरक्रियांच्या नियमांत मूलत: अप्रत्यावर्तनीयता नाही. अप्रत्यावर्तनीयता आढळून येते याचे कारण सुव्यवस्थेची व्याख्या जशी काटेकोर आहे तशी ती अव्यवस्थेची नाही.

बोल्ट्झमान यांचे रंगमंचावर आगमन होण्यापूर्वीच एकोणिसाव्या शतकातील भौतिकीने विज्ञानातील एक अतिशय उपयुक्त, पण सर्वांनाच अत्यंत कोड्यात टाकणारी संकल्पना जन्माला घातली होती :- एन्ट्रॉपी. ही संकल्पना प्रथम पुढे आली ती ऊष्माइंजिनशास्त्रात, परंतु ती कोणत्याही संहतीला लागू पडणारी सार्वत्रिक स्वरूपाची होती. ऊर्जा, दाब, तापमान, आकारमान इत्यादी नेहमीच्या परिचित यंत्रशास्त्रीय व ऊष्माशास्त्रीय परिमाणांपेक्षा एन्ट्रॉपी फारच वेगळी होती. परंतु एन्ट्रॉपी हा संहतीचा मूलभूत गुणधर्म असून तिचा ऊष्मागतिकीच्या दुसऱ्या नियमाशी निकटचा संबंध असल्याचे आढळले. या नियमाने यांत्रिकी कार्य आणि उष्णता या ऊर्जेच्या दोन प्रकारांतील मूलभूत फरकावर शिक्कामोर्तब केले. या नियमानुसार ऊष्माइंजिनशास्त्रातील आवर्ती प्रक्रियांमध्ये उष्णता पूर्णपणे यांत्रिकी कार्यात रूपांतरित करता येत नाही. एन्ट्रॉपीची संकल्पना वापरून ऊष्मागतिकीचा दुसरा नियम थोडक्यात, पण अत्यंत स्पष्टपणे मांडता येतो: बाह्यजगापासून पूर्णपणे अलग केलेल्या संहतीची एन्ट्रॉपी काळाबरोबर वाढत जाऊन तिच्या कमाल किमतीस पोहोचते! निसर्गातील स्वयंस्फूर्त प्रक्रियांमध्ये एन्ट्रॉपी वाढते. खोलीतील एका कोपऱ्यातून पसरणाऱ्या गॅसची एन्ट्रॉपी वाढत जाते. तो गॅस पूर्ण खोलीभर सारखा पसरला की त्याची एन्ट्रॉपी कमाल किंमतीची होते.

एन्ट्रॉपी प्रत्यक्षात खूप उपयुक्त ठरली, तरी संकल्पनेच्या पातळीवर ती एक 'कृष्णपेटी'च होती. या संकल्पनेचा अर्थ काय, ती कशी रचली गेली आहे, याबद्दल कोणालाच काही कळत नव्हते. फक्त एकच जाणवत होते की संहतीतील कसल्यातरी अव्यवस्थेशी एन्ट्रॉपीचा संबंध आहे. बोल्ट्झमान यांचे मोठे योगदान म्हणजे त्यांनी एन्ट्रॉपीचे संख्यात्मक मापन दिले - एक विशिष्ट स्थूलस्थिती दर्शविणाऱ्या सूक्ष्मस्थितीय मांडण्यांची



(अ)



(ब)

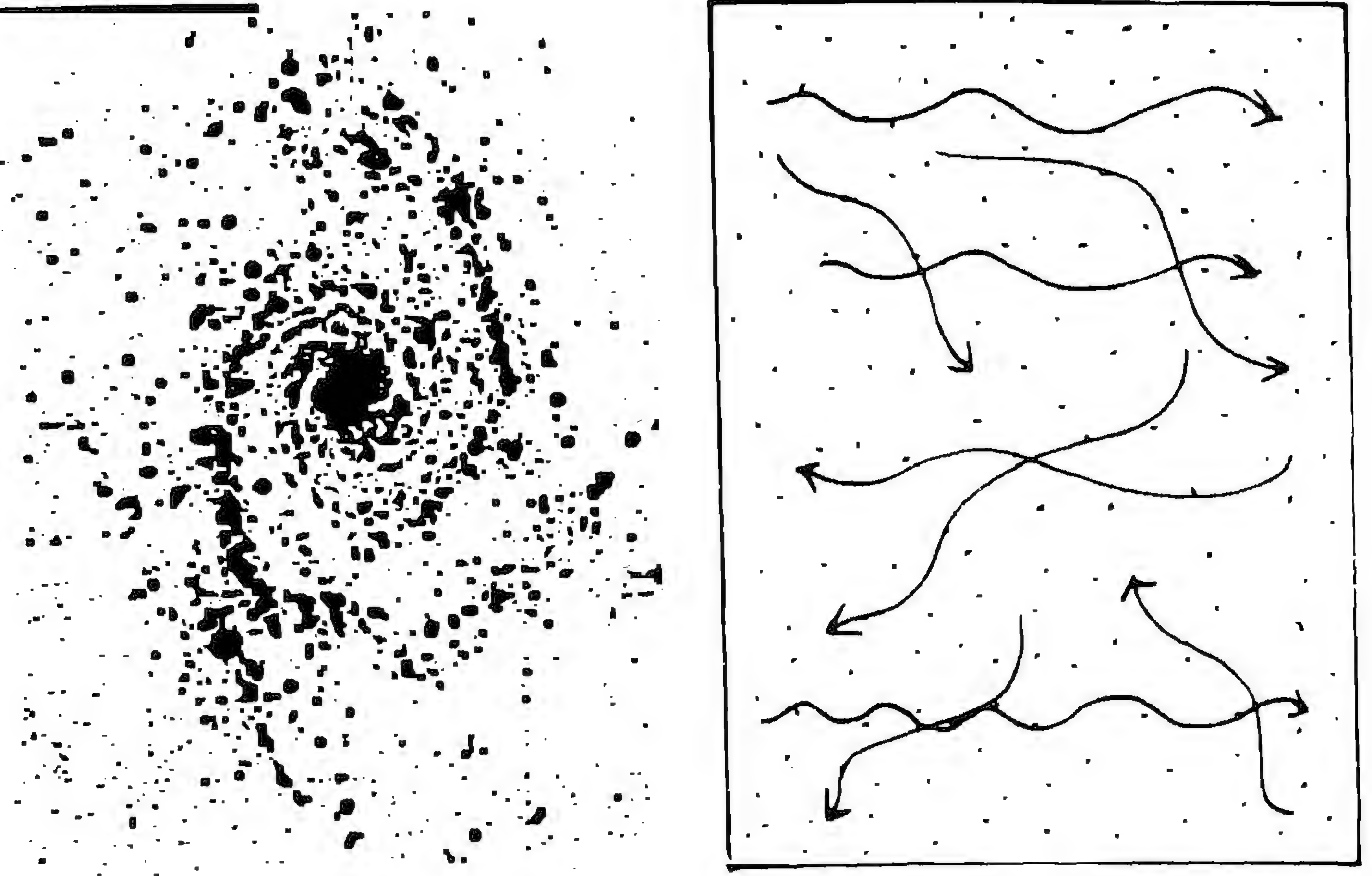
आकृती 14.4 : सिलिंडरमधून गळणारा गॅस अपसरण होऊन खोलीभर पसरतो. (ब) मधील गॅसची एन्ट्रॉपी (अ) पेक्षा जास्त आहे. एन्ट्रॉपीची वाढ ही प्रक्रिया अप्रत्यावर्तनीय आहे.

संख्या (Ω) म्हणजेच त्या अव्यवस्थेचे मापन असे त्यांनी प्रतिपादन केले. एन्ट्रॉपी (S) बेरीजक्षम असते (म्हणजे दोन संहती एकत्र आल्यास एकूण एन्ट्रॉपी प्रत्येक संहतीच्या एन्ट्रॉपीच्या बेरजेएवढी असते), त्यामुळे ती या मांडणीसंख्येच्या लॉगॅरिदमच्या प्रमाणात असते. यावरून येणारे सूत्र, $S = k \log \Omega$,हे विज्ञानात आतापर्यंत शोधल्या गेलेल्या सर्वात मूलभूत सूत्रांतील एक आहे.

ऊष्मागतिकीय कालबाण, निसर्गातील एखाद्या अप्रत्यावर्तनीय प्रक्रियेची दिशा, ही अशा प्रकारे एन्ट्रॉपीच्या बदलाच्या दिशेने निश्चित केली जाते. अलग असणाऱ्या संहतीच्या एन्ट्रॉपीच्या वाढीची दिशा म्हणजे कालबाणाची दिशा - भूत ते भविष्य असा रोखलेला बाण! संपूर्ण विश्व हे एक अलग संहती आहे हे त्याच्या व्याख्येतच अभिप्रेत आहे. भूतकाळापासून वर्तमान ते भविष्यकाळ अशी विश्वाची उत्क्रांती होत असताना त्याची एन्ट्रॉपी वाढली पाहिजे. विश्व अधिकाधिक विस्कळीत होत गेले पाहिजे, त्यातील अव्यवस्था वाढली पाहिजे. उष्णता हे विस्कळीत, अव्यवस्थित ऊर्जेचे स्वरूप आहे. त्यामुळे सध्या जी ऊर्जा कमी एन्ट्रॉपी असलेल्या रचनांत बद्ध आहे ती अंतिमत: उष्णतेत रूपांतरित झाली पाहिजे. विश्व अविचलितपणे त्याच्या भवितव्याकडे वाटचाल करीत आहे. ते भवितव्य आहे : 'उष्णता मृत्यू' : कसलाच ओळखण्याजोगा तोंडवळा नसलेली, पूर्णत: विस्कळीत अशी परम अव्यवस्थेची स्थिती. ऊष्मागतिकीच्या दुसऱ्या नियमाने मांडलेले हे निराशाजनक विधिलिखित!

ऊष्मागतिकीचा दुसरा नियम हा विज्ञानाच्या सर्वात चिवट व कणखर नियमांतील एक आहे. पुंजवाद आणि सापेक्षतावाद यांच्या क्रांतिकारी झंझावातातही हा नियम जशाचा तसा टिकून राहिला. काही काळ असे वाटले होते की आइन्स्टाइन यांच्या व्यापक सापेक्षतावाद सिद्धान्तानुसार अस्तित्वात येणारी कृष्णविवरे हा नियम उलथून टाकणार. परंतु नेमके याच्या उलट घडले. कृष्णविवरांच्या गतिशास्त्रातील काटेकोर आकडेमोडी, तसेच पुंजवादी

परिणामांमुळे कृष्णविवरांतून उत्सर्जन होते हा स्टीफन हॉकिंग यांनी 1974 साली लावलेला शोध, यातून हे स्पष्ट झाले की अगदी कृष्णविवर-भौतिकीसारख्या अनोख्या व आगळ्या क्षेत्रातही या नियमापासून सुटका नाही. या नियमावरील वैज्ञानिकांची श्रद्धाही चांगलीच बळकट आहे. सर आर्थर एडिंग्टन यांनी या विसाव्या शतकाच्या प्रारंभी म्हटले होते की एखादा सिद्धान्त या नियमाच्या विरुद्ध गेला तर 'मानखंडनेच्या खोल गर्तेत कोसळण्याखेरीज



आकृती 14.5 : ऊष्मागतिकीच्या दुसऱ्या नियमानुसार विश्वाचे अंतिम भवितव्य आहे 'उष्णता मृत्यू' - कसलाच तोंडवळा नसलेली वस्तुमात्र व उत्सर्जनाची एकसमान स्थिती.

दुसरे भवितव्य त्याच्यापुढे नाही.' आजही बहुतांश वैज्ञानिक याबाबत एडिंग्टन यांच्याशी सहमत होतील.

परंतु प्रस्थापित रूपावलीच्या (पॅरॅडाईमच्या) यशाने व ताकदीने दबून जाण्याचे कोणीतरी कोठेतरी नाकारतो, आणि त्यातूनच विज्ञानातील महान कल्पना जन्माला येतात. काही दशकांपूर्वी इल्या प्रिगोजिन या तरुण बेल्जिअन रसायनशास्त्रासज्ञाने ऊष्मागतिकीय कालबाणाकडे पाठ फिरविण्याचे ठरविले आणि निसर्गातील अनेक सर्वसाधारण प्रक्रिया ज्यानुसार चालतात अशा वेगळ्या कालबाणाकडे आपली नजर वळवली. या नव्या प्रश्नाला भिडल्यावर निसर्गातील तोपर्यंत दुर्लक्षित राहिलेली काही क्षेत्रे त्यांना धुंडाळावी लागली.

ऊष्मागतिकीच्या कोणत्याही प्रमाणित पाठ्यपुस्तकात एन्ट्रॉपीची संकल्पना विशद करून सांगितलेली असतेच. सर्वसाधारण वाचकासाठी या संकल्पनेवर उत्तम प्रकाश टाकणाऱ्या लिखाणासाठी पाहा संदर्भ 13.

पंधरा

सर्जनक्षम कालबाण

सुव्यवस्थेपासून अव्यवस्थेकडे - हा सर्वसाधारण अनुभव ऊष्मागतिकीय कालबाण निश्चित करतो. परंतु आणखी एक अनुभवही इतकाच सर्वसाधारण व नेहमी आढळणारा आहे. निसर्गातील अनेक प्रक्रिया सुव्यवस्था निर्माण करतात. आणि वाढती व्यामिश्रता, नियमबद्धता व संघटन या दिशेने उत्क्रांत होतात. प्रारंभी सरळ, साध्यासोप्या एकजिनसी असणाऱ्या गोष्टींमध्ये काळाबरोबर अंतर्गत रचना निर्माण होताना आढळते. सजीवांच्या बाबत हा अनुभव अधिक प्रमाणात येतो. नवजात बालकाचा विचार करा - नऊ महिन्यांच्या कालावधीत छोट्या पेशीरूपी गर्भाचे रूपांतर एका मोठ्या गुंतागुंतीची रचना असणाऱ्या सुसंघटित संहतीमध्ये झालेले असते. लहान मुलांची वागणूक साधी व बहुतांशी सर्वत्र सारखीच असते. परंतु वाढत्या वयाबरोबर ती प्रौढ व्यक्तीच्या व्यामिश्र व वैयक्तिक वैशिष्ट्यांनी परिपूर्ण अशा वागणुकीत रूपांतरित होते. एखाद्या विषयाचा अभ्यास करणाऱ्या व्यक्तीची तत्संबंधीची जाणीव सुरुवातीस बटबटीत व ढोबळ असते. परंतु कालांतराने तिचे रूपांतर तज्ज्ञ व्यक्तीच्या अनेकमितीय, सखोल व सुरचित जाणिवेत होते. काळाबरोबर एखाद्या आदिम स्वरूपाच्या मानवी वसाहतीचे रूपांतर खूप व्यामिश्र स्वरूपाचे व्यवहार व देवाणघेव करणाऱ्या आधुनिक शहरात होते. या प्रकारची अनेक उदाहरणे देता येतील.

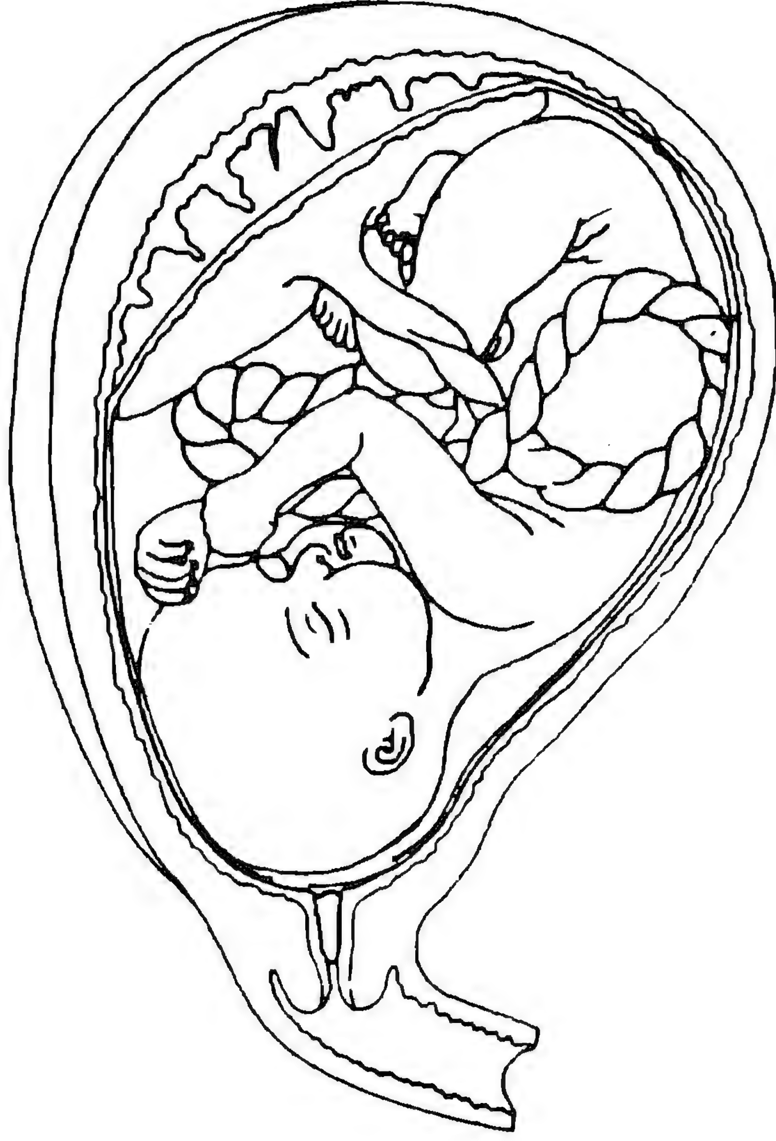
मात्र काळाबरोबर वाढत जाणारी व्यामिश्रता व गुंतागुंत ही लक्षणे काही फक्त सजीवांपुरती मर्यादित नाहीत. एकजिनसी स्वरूपातील वायूचे रूपांतर द्रवात आणि त्यानंतर स्फटिकरचना असलेल्या घनात होते. एखादा द्रवपदार्थ असमानरीत्या तापविला (उदा. तो द्रव ठेवलेल्या भांड्याचा तळ व वरचा भाग वेगवेगळ्या तापमानांस ठेवून) तर तापमानातील फरकाच्या विशिष्ट किमतीस त्या द्रवात अभिसरण प्रवाह वाहू लागतात, आणि या प्रवाहात अतिशय व्यामिश्र, गुंतागुंतीच्या रचना आढळून येतात. अनेक रासायनिक प्रक्रियांत विशिष्ट परिस्थितीत अत्यंत गुंतागुंतीच्या, थक्क करून सोडणाऱ्या रचना व आकार आढळून येतात. या रचना व हे आकार स्थिर तसेच काळाप्रमाणे बदलणारेही असतात. खुद्द आपले हे विश्व उगम पावले तेव्हा त्याला काही तोंडवळा नव्हता. विश्वाचे वय वाढत गेले तशा

आकाशगंगा तयार झाल्या. त्यातून पुढे, प्रत्येक आकाशगंगेत तारे व नंतर ताऱ्यांभोवती ग्रह अशा रचना निर्माण झाल्या.

ऊष्मागतिकीच्या दुसऱ्या नियमानुसार सुव्यवस्थित रचना अव्यवस्था आणि एकसारखेपणा यांच्या दिशेने उत्क्रांत होत जाते. त्यामुळे वरील उदाहरणे या नियमाला खोटे पाडताहेत असे वाटते. परंतु हे खरे नाही. अव्यवस्था वाढत जाते, हा ऊष्मागतिकीचा नियम बाह्य देवाणघेवाणीपासून अलिप्त असणाऱ्या अलग संहतींना लागू पडतो. वरीलपैकी शेवटचे उदाहरण सोडल्यास इतर संहती काही अलग नाहीत. वाढणारा गर्भ अलग नसतो - तो सतत आपल्या पर्यावरणाशी म्हणजे आईच्या गर्भाशयाशी ऊर्जा व पदार्थांची देवाणघेवाण करत असतो. मोठ्या वृक्षात रूपांतरित होणारे छोटे रोपटे सतत मातीतून अन्नपदार्थ आणि वातावरणातून उष्णता व प्रकाशाच्या स्वरूपात ऊर्जा घेत असते. ज्या रासायनिक प्रक्रियांत अंतर्गत रचना नजरेस पडतात त्यांत सतत निरनिराळी रसायने व त्यांची संयुगे यांची आवकजावक चालू असते. एखाद्या छोट्या वस्तीचे जेव्हा शहर बनते तेव्हा माणसे, अन्नपदार्थ आणि पैसा या स्वरूपात तेथे सतत बाहेरून आवक चालू असते. थोडक्यात म्हणजे आपल्या दृष्टीस पडणारी वाढती व्यामिश्रता अलग संहतींतील नसून आपल्या परिसराशी ऊर्जा व पदार्थांचा विनिमय करीत असलेल्या खुल्या संहतींशी निगडित असते. अशा प्रकारे विशिष्ट परिस्थितीत खुल्या संहती भूत आणि भविष्यकाळाची व्याख्या करू शकतात - कमी व्यामिश्रता म्हणजे भूतकाळ, तर अधिक व्यामिश्रता म्हणजे भविष्यकाळ! सर्जनक्षमता म्हणजे वाढती सुव्यवस्था आणि व्यामिश्रता असलेल्या रचना निर्माण करणे, असे मानले तर मग निसर्गातील खुल्या संहतीत सर्जनक्षम कालबाण दडलेला असतो असे म्हणावे लागेल.

परंतु प्रस्थापित विज्ञानात सर्जनक्षम कालबाणाला मूलभूत पातळीवरचे स्थान दिले जात नाही. व्यामिश्रता ही तशी गुणात्मक कल्पना असून अजूनपर्यंत तरी तिची काटेकोर व्याख्या करणे जमलेले नाही. अशा कल्पनेवर आधारित कालबाणाकडे जरा संशयानेच बघितले जाते. बऱ्याच वैज्ञानिकांचे असे मत आहे की एका नवीन कालबाणाची कल्पना स्वीकारण्याची काहीच गरज नाही, कारण निसर्गातील संहतींत दिसून येणारी व्यामिश्रतेतील वाढ नेहमीच्या ऊष्मागतिकी नियमांनुसार समजून घेता येते. ऊष्मागतिकी केवळ एवढेच सांगते की एखाद्या अलग संहतीची वा संपूर्ण विश्वाची एन्ट्रॉपी काळाबरोबर वाढली पाहिजे. विश्वाच्या एखाद्या मर्यादित विभागात एन्ट्रॉपी कमी होऊच शकणार नाही असे या शास्त्रात कोठेही म्हटलेले नाही. एका संहतीची एन्ट्रॉपी कमी होऊ शकते. फक्त त्याच वेळी परिसरातील एन्ट्रॉपीची वाढ त्यापेक्षाही जास्त व्हायला पाहिजे म्हणजे ती संहती अधिक परिसर यांची एकूण एन्ट्रॉपी वाढलेली असेल. ही गोष्ट अनेक स्थितिरूपांतरांत (द्रवावस्था ते घनावस्था, अचुंबकीय ते चुंबकीय) घडून येते आणि नेहमीच्या ऊष्मागतिकी सिद्धान्तानुसार त्याचे व्यवस्थित स्पष्टीकरणही देता येते. विश्वातील काही मर्यादित भागात उद्‌भवणाऱ्या कमी एन्ट्रॉपीच्या रचना विशद करण्यासाठी वेगळ्या नियमांची काही गरज नाही.

या दृष्टिकोनानुसार विश्वाची सुरुवात झाली ती पदार्थ आणि प्रारणाने भरलेल्या, सर्वत्र सारख्याच एकजिनसी असणाऱ्या व विस्तारत जाणाऱ्या ढगातून. घनतेतील स्वैर



आकृती 15.1 : गर्भ ही एक खुली असंतुलित ऊष्मागतिकीय संहती आहे. आपल्या पर्यावरणाशी म्हणजे आईच्या गर्भाशयाशी ती सतत ऊर्जा व पदार्थांची देवाणघेवाण करत असते. अशा संहतींमध्ये सर्जनक्षम कालबाण असतो : काळाबरोबर वाढणारी व्यामिश्रता व संघटन. कसलाही तोंडवळा नसलेला गर्भ काळाबरोबर अत्यंत रचनाबद्ध सुसंघटित अशा नवजात अर्भकात रूपांतरित होतो.

चढउतारांमुळे या विश्वातील काही भाग इतरांपेक्षा अधिक घन झाले. नेहमी अस्तित्वात असणाऱ्या गुरुत्वाकर्षण बलाने हे चढउतार अधिक मोठे केले, इतरत्र पसरविले व त्यातून अखेर वेगवेगळ्या आकाशगंगा निर्माण झाल्या. अशाच प्रक्रिया प्रत्येक आकाशगंगेत होऊन त्यातून तारे व ग्रह निर्माण झाले. अशा प्रकारे या दृष्टिकोनानुसार गुरुत्वाकर्षण आणि प्रारंभीच्या काळातील घनतेतील छोटे चढउतार यामुळे विश्वातील विविध रचना घडून आल्या. या रचनांची घडण होण्यासाठी कोणत्याही खास वेगळ्या नियमांची गरज पडली नाही. याच धर्तीवर निसर्गातील सर्व खुल्या संहतींबाबत असे म्हणता येईल की त्यांच्यातील व्यामिश्रता वाढत जाते ती प्रारंभीच्या खास परिस्थितीमुळे. अशा खास परिस्थितीत भौतिकीतील प्रस्थापित नियमच संहतीला वाढत्या व्यामिश्रतेकडे नेण्यास पुरे पडतात. 'व्यामिश्रता वाढत राहते' असा आणखी एखादा मूलभूत नियम गृहीत धरण्याची वा

सर्जनक्षम कालबाणाच्या कल्पनेस आवाहन करण्याची काही गरज नाही. विश्वातील सर्जनशीलता अपघाताने निर्माण होते!

इल्या प्रिगोजिन या दृष्टिकोनाबद्दल समाधानी नव्हते. त्यांना असा संशय येत होता की यांत्रिकी व ऊष्मागतिकी रूपावलीत अडकून पडलेले विज्ञान निसर्गातील खऱ्याखुऱ्या सर्जनशील प्रक्रियांकडे दुर्लक्ष करीत आहे. न्यूटनीय स्थितीगतिशास्त्रानुसार भूत आणि भविष्य दोन्ही पूर्णपणे वर्तमानस्थिती निश्चित करत असते. त्यामुळे या सिद्धान्तात काळ अगदीच शक्तिहीन व भाकड गणला गेला; घटनाक्रम सांगण्यासाठी वापरण्याचे खुणेचे साधन यापलीकडे काळाला काही महत्त्व उरले नाही. ऊष्मागतिकीने काळाकडे एक नक्की भूमिका सोपविली. परंतु ती एक निष्क्रिय व ऱ्हासाकडे जाणारी भूमिका होती - कालप्रवाहात विश्वाची केवळ विनाशाप्रत घसरण होत राहते. परंतु निसर्गाने काळाला एक सर्जनशील भूमिकाही बहाल केली आहे, आणि निसर्गातील कितीतरी खुल्या संहतींमध्ये तिचा आविष्कार दिसून येतो. काळाची ही भूमिका विज्ञानात दुर्लक्षिली गेली होती. काळ ही 'विस्मृतीत गेलेली मिती' आहे असे प्रिगोजिन खेदपूर्वक म्हणत.

प्रिगोजिन यांच्या दृष्टीने सर्जनक्षम कालबाण निसर्गात इतका स्वाभाविक व सार्वत्रिक आढळणारा आहे की तो मूलभूतच गणला पाहिजे. निसर्गातील खुल्या संहतींमध्ये व्यामिश्रता असते, इतकेच नव्हे तर व्यामिश्रतेत वाढ होण्याची अंगभूत प्रवृत्तीच त्यांच्यात असावी असे वाटते. खुल्या संहतींमध्ये आढळणारी व्यामिश्रता ऊष्मागतिकीच्या दुसऱ्या नियमाशी सुसंगत आहे या एकाच गोष्टीची खातरजमा भौतिकी वैज्ञानिक करून घेत होते. ते व्यामिश्रतेचे अस्तित्व विशद करत नव्हते. मग संहतींची व्यामिश्रता वाढण्याच्या प्रवृत्तीसंबंधी तर बोलायलाच नको. भौतिकी वैज्ञानिकांचा दृष्टिकोन 'प्रारंभीची अपघाती स्थिती' या शब्दांत व्यक्त केला जातो. निसर्गात आढळणाऱ्या व्यामिश्र संहतींचा कणखरपणा व स्थैर्य या दोन मुख्य लक्षणांवर या 'अपघाती' दृष्टिकोनातून कसलाच प्रकाश पडत नाही. सर्जनक्षम कालबाण या संकल्पनेबाबत भौतिकी वैज्ञानिकांनी दिलेले उत्तर चुकीचे नव्हते; पण ते प्रश्नाला बगल देणारे निश्चितच होते.

पण प्रिगोजिन एक वैज्ञानिक होते. निसर्गाच्या निर्मितिक्षम प्रवृत्तीत 'दैवी' हस्तक्षेप शोधू इच्छिणारे गूढवादी नव्हते. त्यांच्या दृष्टीने ऊष्मागतिकीय कालबाण हा जितका वस्तुनिष्ठ सत्याचा भाग आहे तितकाच निसर्गातील अनेक संहतींत, खास करून जीवशास्त्रीय संहतींत, आढळणारा सर्जनक्षम कालबाण हाही वस्तुनिष्ठ सत्याचाच भाग आहे. जीवशास्त्र भौतिकीपासून दुरावण्याचे कारण म्हणजे जीवशास्त्राच्या दृष्टीने ज्या गोष्टी खऱ्या महत्त्वाच्या, त्यांना भौतिकीत नैसर्गिक स्थानच नाही. ही दरी भरून काढून भौतिकी व जीवशास्त्र यांचे एकत्रीकरण करण्याची प्रिगोजिन यांची इच्छा होती. सर्जनक्षम कालबाणाला आपल्या सिद्धान्तात जागा उपलब्ध करून देण्यासाठी जरूर पडल्यास भौतिकीचे मूलभूत नियम बदलण्याचीही प्रियोजिन यांची तयारी होती. एक गोष्ट निश्चित की हे फार कठीण कर्म होते; अगदी प्रिगोजिन यांनाही भारी असे. आणि अजूनही ह्या कामाचा शेवट नजरेच्या टप्प्यात आलेला नाही. परंतु भौतिकशास्त्रे आणि जीवशास्त्रे यांची एकी घडवून आणण्याच्या

प्रयत्नात प्रिगोजिन यांनी ऊष्मागतिकीची वाढ जीवशास्त्रीय दृष्टिकोनातून महत्त्वाच्या असणाऱ्या क्षेत्रांतही घडवून आणली. या नव्या वाढीतूनच 'ऱ्हासीय संरचना' ही महत्त्वाची संकल्पना पुढे आली. प्रिगोजिन यांनी ही संकल्पना प्रथम रसायनशास्त्रात शोधून काढली व नंतर इतर क्षेत्रांतही ती आढळून आली. 'ऱ्हासीय संरचनांच्या' सखोल व मर्मग्राही संशोधनासाठी इल्या प्रिगोजिन यांना 1977 चे रसायनशास्त्रातील नोबेल पारितोषिक बहाल केले गेले.

सोळा

ऱ्हासीय संरचना

पर्यावरणाबरोबर संहतीची ऊर्जेची देवाणघेवाण दोन भिन्न प्रकारे होत असते. उष्णता आणि कार्य यांद्वारे. कॉफीच्या गरम वाफाळलेल्या कपातील अंतर्गत ऊर्जा कमी होते ती उष्णता भोवतालच्या वातावरणात सोडल्याने. एखाद्या उष्णता-निरोधी सिलिंडरमध्ये बंदिस्त असणाऱ्या वायूचे दट्ट्याने आकुंचन घडवून आणले की बाह्यप्रेरणांमुळे झालेल्या या यांत्रिकी कार्याने वायूची अंतर्गत ऊर्जा वाढते. संहती आपल्या पर्यावरणाशी पदार्थांची देवाणघेवाण करत असतात. एखाद्या खोलीचे सच्छिद्र पडद्याने दोन भाग केले तर एका बाजूस जास्त प्रमाणात असलेला वायू अभिसरणाने दुसऱ्या बाजूस पसरतो. संहती व तिच्याभोवतीचे वातावरण यांच्यात होणाऱ्या ऊर्जा व पदार्थांच्या देवाणघेवाणीचे, विनिमयाचे नियम म्हणजे ऊष्मागतिकीशास्त्र.

ऊष्मागतिकीत सर्वसाधारणपणे संतुलनस्थितीतील संहतींचा विचार होतो. अशा संहतींचे व्यवस्थित वर्णन करण्यासाठी काही सर्वसाधारण स्वरूपाची मोजकी वैशिष्ट्ये पुरेशी होतात - उदा. दाब, आकारमान, तापमान, चुंबकत्वाचे प्रमाण वगैरे. ही वैशिष्ट्ये ऊष्मागतिकीय चले म्हणून ओळखली जातात. संतुलन अवस्थेत सर्व ऊष्मागतिकीय चलांच्या किमती स्थिर असतात. ज्या वेळी संहतीतील बदलाचा विचार केला जातो, तेव्हा तो बदल अत्यंत धीम्या गतीने होत असल्याची कल्पना केली जाते - इतक्या धीम्या गतीने की बदलाच्या प्रत्येक टप्प्यावर ती संहती संतुलन अवस्थेत असल्याचे मानले जाते. दुसऱ्या शब्दांत सांगायचे तर संहती एका संतुलनस्थितीतून दुसऱ्या संतुलनस्थितीत अर्ध-स्थिर (quasi-static) प्रकारे प्रवास करते अशी कल्पना केली जाते.

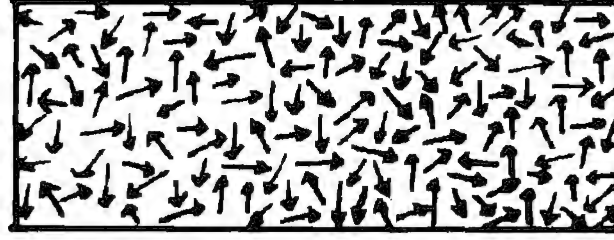
स्थितीगतिशास्त्रातील 'बिंदूरूपी पदार्थकण' जसा काल्पनिक असतो, थेट त्याच प्रकारे शुद्ध ऊष्मागतिकीय संतुलनअवस्थाही काल्पनिकच आहे. परंतु त्यातील सुबोधतेमुळे संतुलन ऊष्मागतिकीशास्त्रात एकोणिसाव्या शतकात खूपच प्रगती घडून आली. ऊष्मा इंजिने, रासायनिक प्रक्रिया, स्थितिरूपांतर आणि अन्य अनेक क्षेत्रांत महत्त्वाचे संशोधन परिणाम हाती गवसले. यातूनच ऊष्मागतिकीय स्थितीची 'एन्ट्रॉपी' ही मूलभूत संकल्पनाही पुढे आली. चौदाव्या प्रकरणात वर्णन केल्याप्रमाणे लुडविग बोल्ट्झमान यांनी या एन्ट्रॉपीच्या

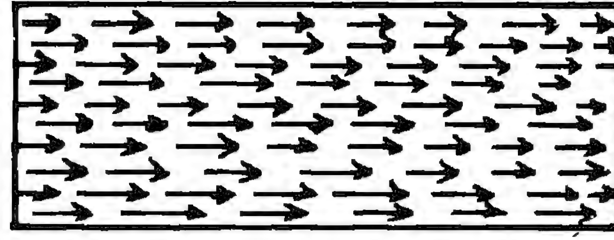
संकल्पनेवर अधिक प्रकाश टाकला. पूर्ण संतुलनअवस्थेत नसलेल्या, परंतु तिच्या खूप जवळपास असलेल्या स्थितींकडे वैज्ञानिकांचे लक्ष तसे बऱ्याचदा वेधले गेले. उदाहरणार्थ, दोन टोके वेगवेगळ्या तापमानास असणारी लांब सळई संतुलनअवस्थेत नसते. परंतु अशा सळईचा प्रत्येक छोटा तुकडा जवळजवळ संतुलनअवस्थेत असतो. तापमानातील फरकामुळे उष्ण टोकापासून थंड टोकाकडे उष्णतेचा प्रवाह वाहतो. जेव्हा संथ स्थिती असते तेव्हा उष्णतेचा प्रवाह तापमान फरकाच्या रेषीय प्रमाणात वाहतो. संहती जवळपास संतुलन अवस्थेत असतात तेव्हा वाहणारे प्रवाह त्यांना निर्माण करणाऱ्या *कारणांच्या* समप्रमाणात असतात. या वेळी आपण ऊष्मागतिकीच्या रेषीय विभागात वावरत असतो.

संतुलित वा जवळपास संतुलित असणाऱ्या ऊष्मागतिकीय संहतींत जीवशास्त्रीय संहतीत आढळतात तशा गुंतागुंतीच्या संरचना व स्वयंसंघटन आढळून येत नाही. स्वयंसंघटन म्हणजे संहतीमधील क्रमवार सुव्यवस्था व सुसंगती. संतुलन अवस्थेत संरचना तयारच होत नाहीत असे नव्हे. त्या होतातही. उदा. पाणी थंड केले की त्याचे बर्फात म्हणजे स्फटिकरचनेत रूपांतर होते. क्यूरी तापमान म्हणून ओळखल्या जाणाऱ्या एका विशिष्ट तापमानाच्या खाली प्रत्येक समचुंबकीय (पॅरॅमॅग्नेटिक) पदार्थ लोहचुंबकीय (फेरोमॅग्नेटिक) बनतो. समचुंबकीय स्थितीतील अणुस्वरूपातील स्वैर विखुरलेले चुंबक परस्परांशी समांतर अशी रचना घडवून आणून लोहचुंबकीय स्थिती प्राप्त करून घेतात. साधारण विद्युतवाहकत्व असणारे पदार्थ पुरेसे थंड केल्यावर अतिसंवाहक स्थितीत जातात. या वेळी धातूतील इलेक्ट्रॉन्स परस्पर सहकार्याची अशी असामान्य स्थिती धारण करतात की त्या धातूचा रोध जवळजवळ शून्यवतच होतो. द्रवरूप हिलियम विशिष्ट तापमानाच्या खाली अतिप्रवाही बनतो - त्यातील सांद्रता, अंतर्गत घर्षण नाहीसे होते आणि फारच अनोखे गुणधर्म त्यास प्राप्त होतात. अंतर्गत रचना असलेली ही रूपांतरे सममिती कमी झाल्याचे दर्शवितात. उदाहरणार्थ, प्रारंभी सर्व दिशांना सारखेच गुणधर्म असलेला अचुंबकीय पदार्थ जेव्हा चुंबकीय बनतो तेव्हा त्याच्याशी एक विशिष्ट दिशा निगडित झालेली असते.

परंतु तरीही सहकारी स्वरूपाच्या संरचनांची तुलना जीवशास्त्रात आढळून येणाऱ्या संरचना व त्यांतील संघटन यांच्यातील व्यामिश्रतेशी होऊच शकत नाही. ही बाब संख्यात्मक प्रकारे मांडणे कठीण असले तरी या संरचनांतील गुणात्मक फरक उघडच आहे. पहिली गोष्ट म्हणजे संतुलनस्थितीतील ऊष्मागतिकीय संरचना स्थिर असतात, त्यांच्यात सतत बदल घडत नसतो. याउलट जीवशास्त्रातील अगदी पेशीसारखी साधी प्राथमिक स्तरावरील संरचनाही गतिशील असते, सतत बदलणारी असते. लोहचुंबकासारखी रचना एक स्थिती असते, तर स्वयंसंघटन करणारा बॅक्टेरियम एक प्रक्रिया असते. या दोन प्रकारच्या संरचनांमध्ये आणखी एक सर्वात महत्त्वाचा फरक आहे. ऊष्मागतिकीय संतुलित रचना उद्‌भवतात त्या संहती थंड केल्यावर. सममिती स्वयंस्फूर्तपणे मोडली जाते ती तापमान कमी केल्यावर. याउलट जीवशास्त्रातील गतिशील संरचना निर्माण होऊन वाढतात त्या पर्यावरणातून त्या संहतीला उष्णता व पदार्थाचा *पुरवठा* झाल्यामुळे. ही गोष्ट आपल्या ऊष्मागतिकीय अंत:प्रेरणेच्या विरोधात जाणारी आहे. सर्वसाधारणपणे एखाद्या संहतीस







आकृती 16.1 : संहती थंड केल्यावर ऊष्मागतिकीय संतुलनव्यवस्थेतही संरचना तयार होतात. 0^{0}C या तापमानास पाण्याचा बर्फ होतो. क्यूरी तापमानाच्या खाली समचुंबकीय पदार्थ लोहचुंबकीय बनतो.

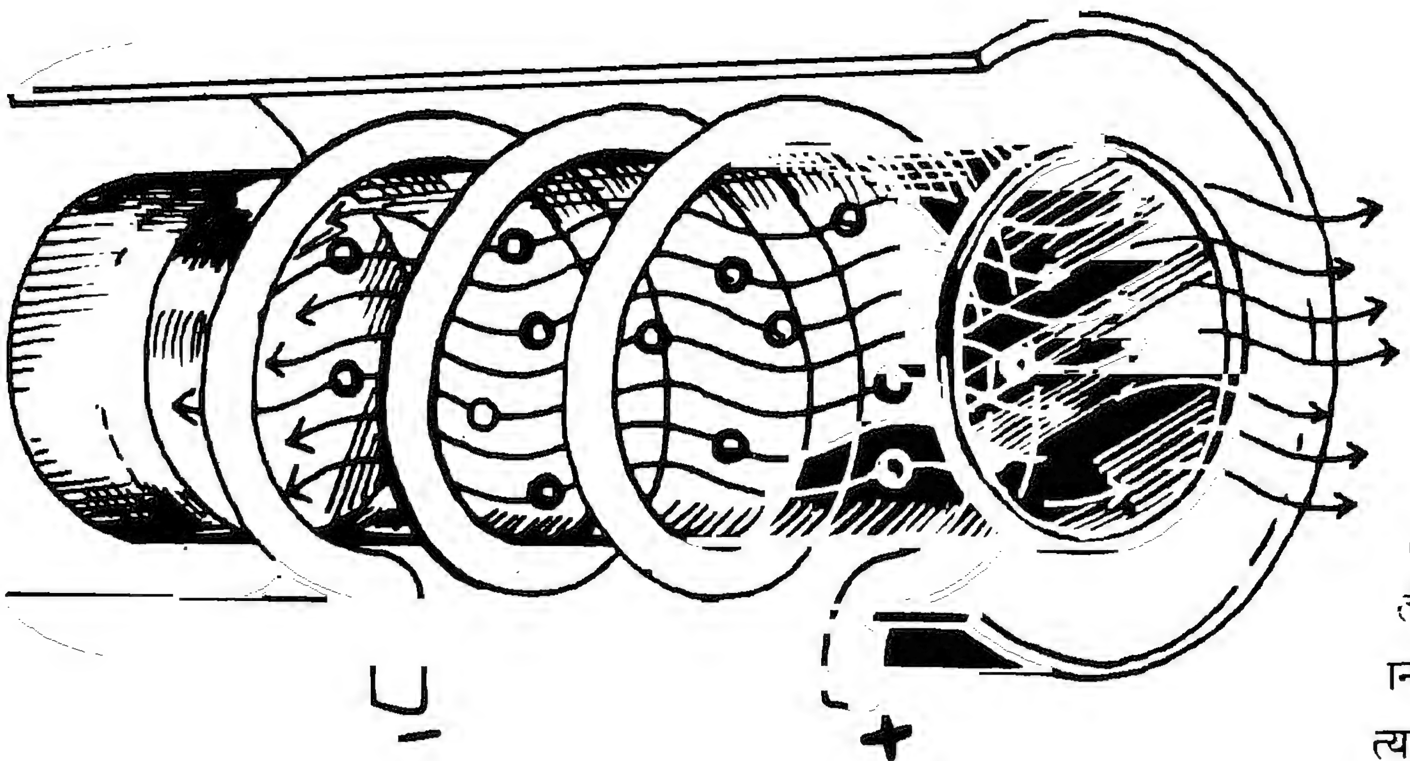
उष्णता व पदार्थ यांचा पुरवठा केल्यावर ती विस्कळीत होऊन अव्यवस्था निर्माण होते. परंतु जीवशास्त्रीय संहतींना उष्णता व पदार्थ यांचा पुरवठा केल्यावर मात्र संरचना व संघटन यांचा उदय होतो.

जीवशास्त्रीय संहती या ऊष्मागतिकीय संतुलनापासून *बऱ्याच* दूर असणाऱ्या, खूपच असंतुलित अवस्थेतील संहती असतात. भोवतालच्या परिसराशी चालणाऱ्या ऊर्जा व पदार्थांच्या सततच्या देवाणघेवाणीमुळे त्या या स्थितीत ठेवल्या जातात. ही देवाणघेवाण बंद केली तर त्या संहती संतुलित स्थितीकडे मार्गक्रमणा करून अखेर बिनचेहऱ्याच्या, निष्क्रिय व मृत बनतात. खूप असंतुलित स्थितीत ठेवल्या गेल्यामुळेच संरचना जिवंत राहतात. असंतुलित संहती परिसरातून ऊर्जा व पदार्थ घेतात, कमी एन्ट्रॉपी असलेल्या संरचना स्वत:अंतर्गत निर्माण करतात आणि ऱ्हासीय प्रक्रियांद्वारा उष्णता व टाकाऊ पदार्थांच्या रूपात पुरेशी एन्ट्रॉपी वातावरणात उत्सर्जित करतात. यामुळे ती संहती व भोवतीचे वातावरण यांचा एकत्रित विचार केल्यास ऊष्मागतिकीचा दुसरा नियमही व्यवस्थित पाळला जातो. ही

संरचना टिकवून ठेवण्यासाठीही ऱ्हास महत्त्वाचा ठरतो. वातावरणातील चढउतारांचे संहतीवर होणारे परिणाम ऱ्हास होऊन नाहीसे होतात; त्यामुळे संहतीचे अंतर्गत स्वयंसंघटन टिकून राहते. ऱ्हासप्रक्रियेच्या या मूलभूत महत्त्वाच्या भूमिकेमुळे प्रिगोजिन यांनी स्वयंसंघटन घडवून आणणाऱ्या व खूप असंतुलित स्थितीत असणाऱ्या ऊष्मागतिकीय संहतींचे 'ऱ्हासीय संरचना' असे नामकरण केले.

परंतु 'ऱ्हासीय संरचना' काही जीवशास्त्रापुरत्याच मर्यादित नसतात. भौतिकी, खगोलशास्त्र, रसायनशास्त्र वगैरेतही लक्षवेधक अशा स्वयंसंघटन करणाऱ्या असंतुलित संहती आढळून येतात. या सर्व संहतींमधील मूलभूत समान धागा म्हणजे त्यांची अरेषीयता. परिणाम (वा कार्य) हे बलाच्या (वा कारणाच्या) समप्रमाणात नसतात. ऱ्हासीय संरचना या अरेषीय संहती असतात व त्यांची अरेषीयता बहुधा पश्च-भरण म्हणजे फीडबॅक रचनेमुळे आलेली असते. स्थितीगतिशास्त्रातील निश्चिततावादी कोलाहल ज्याप्रमाणे अरेषीयतेमुळे उद्‌भवतो, त्याचप्रमाणे ऊष्मागतिकीय संहतींमधील स्वयंसंघटन हेही संहतींमधील अरेषीयतेचे अस्तित्व उघड करते.

स्वयंसंघटन घडवून आणणाऱ्या खूप असंतुलित स्थितीतील भौतिकी संहतीचे सर्वात नजरेत भरणारे उदाहरण म्हणजे लेसर. कोणत्याही प्रकाशस्रोतातील प्रारणाचा उगम एकच असतो. ऊर्जेच्या उद्दीपित स्थितीतील अणू खालच्या कमी ऊर्जेच्या स्थितीत जातात आणि तो ऊर्जेचा फरक प्रारणरूपाने बाहेर फेकला जातो. अणूंना उद्दीपित केले जाण्याची पद्धत वेगवेगळ्या स्रोतांत वेगवेगळी असते. तापमानामुळे अणू-रेणूंना उष्मीय गती प्राप्त झालेली असते व ते स्वैरपणे इतस्तत: फिरत असतात. काही स्रोतांत उच्च तापमानाला या अशा अणू-रेणूंमधील परस्परांशी होणाऱ्या टकरा ऊर्जाउद्दीपन घडवून आणतात.

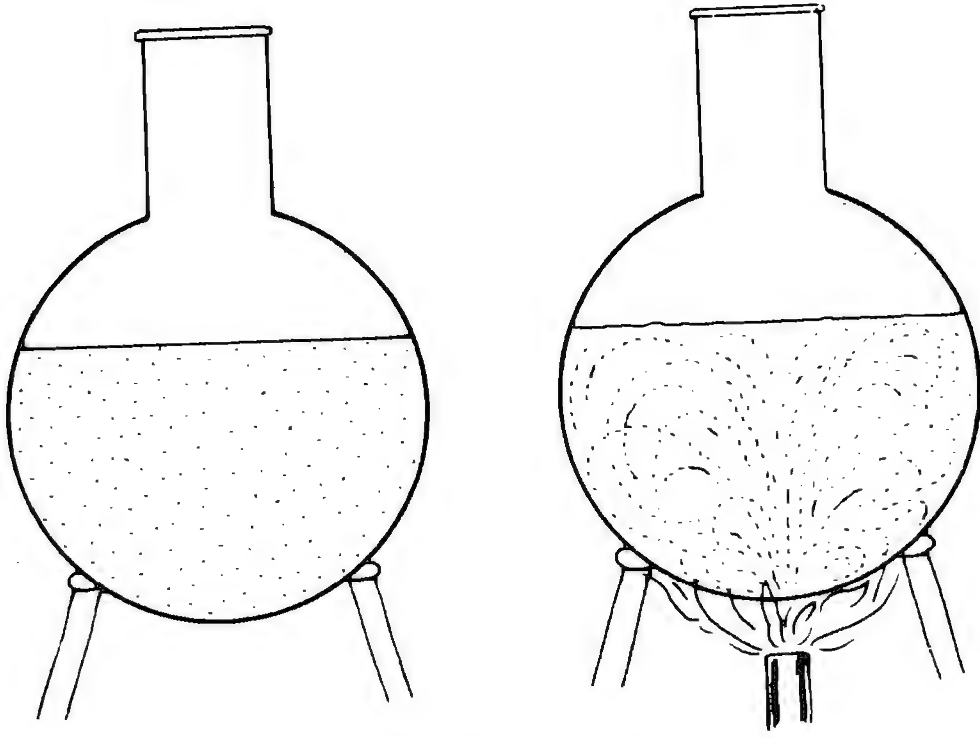


आकृती 16.2 : लेसर ही ऊष्मागतिकीय संतुलनापासून खूप दूर असलेली एक अरेषीय प्रकाशी संहती आहे.

ट्यूबलाइटसारख्या वायू भरलेल्या नलिकांत अयनीकरणामुळे निर्माण झालेले इलेक्ट्रॉन ऊर्जा प्राप्त करून नलिकेतील अणूंशी टकरा घेत त्यांना उद्दीपित करतात. लेसरमध्ये विशिष्ट प्रकारे बनविलेला 'ऊर्जापंप' अणूंना उद्दीपित स्थितीत नेऊन सोडतो. सर्वसाधारणपणे उद्दीपित स्थितीतील अणूंची संख्या मूळस्थितीतील अणुसंख्येपेक्षा कमी असते. परंतु लेसरमध्ये 'ऊर्जापंप' 'अणुसंख्यांची उलटापालट' घडवून आणतो - उद्दीपित स्थितीतील अणूंची संख्या मूळस्थितीतील अणूंच्या संख्येपेक्षा जास्त होते. आणि ही परिस्थिती ऊष्मागतिकीय संतुलनाच्या अगदी विरुद्ध असते. प्रकाशाच्या सर्वसाधारण स्रोतात अणू उत्स्फूर्तपणे उद्दीपित स्थितीतून मूळ स्थितीत परतताना प्रकाशाचे प्रारण घडून येते. येथे दोन अणूंच्या प्रारणतरंगांच्या प्रावस्थांचा परस्परांशी काही संबंध नसतो, संगती नसते. हे स्रोत असंसंजित (incoherent), सुसंगत नसलेला प्रकाश बाहेर टाकत असतात : छोट्या तरंगांच्या स्वरूपात. लेसर स्रोतात मात्र सुरुवातीच्या प्रारणामुळे अन्य उद्दीपित अणूंचे प्रारण उत्तेजित केले जाते. लेसर-प्रकाश अधिक सुसंघटित असतो; त्यातील प्रकाशतरंग लांबलचक आणि संसंजित (coherent), सुसंगत स्वरूपाचे असतात. लेसर ही असंतुलित अरेषीय प्रकाशीय संहती असून अणुसंख्यांची उलटापालट आणि अन्य प्राचलांच्या क्रांतिक (critical) म्हणजे निर्णायक अशा विशिष्ट किमतींना तिच्यात स्वयंसंघटनाचा गुणधर्म (संसंजित प्रारण) आढळून येतो.

एक 'क्रांतिक उंबरठा' असण्याचे हे लक्षण सर्वच स्वयंसंघटनक्षम संहतींत आढळते. अशा संहतीस ऊष्मागतिकीय संतुलनअवस्थेपासून दूर ढकलत गेले की एक क्रांतिक, निर्णायक टप्पा येतो आणि एकाएकी ती संहती संरचित, संघटित अवस्थेत रूपांतरित होते. ही गोष्ट आपल्या स्वयंपाकघरात भांड्यात पाणी गरम करताना रोजच घडत असते. तापविण्याची क्रिया सर्वत्र एकसारखी नसल्याने भांड्याचा तळ व तेथील पाणी यांचे तापमान वरच्या भागापेक्षा जास्त होते. प्रारंभीची संतुलित स्थिती बदलून पाणी असंतुलित स्थितीत जाते. तापमानातील फरक कमी असतो तोपर्यंत पाण्याची स्थिती जवळजवळ संतुलित असते, आणि पाण्याच्या सांद्रतेमुळे (अंतर्गत घर्षणामुळे) तळाचे हलके थर वर येऊ शकत नाहीत. जसजसा तापमानातील फरक वाढत जातो तसतशी पाण्याची स्थिती संतुलन अवस्थेपासून अधिकाधिक दुरावत जाते. काळजीपूर्वक नियंत्रणाखाली प्रयोग केल्यास, तापमान फरकाच्या एका विशिष्ट क्रांतिक किमतीस एकाएकी अभिसरणाची हालचाल सुरू होते. पूर्वी काहीच नव्हते तेथे एक आकृतिबंध नजरेस पडू लागतो - षटकोनी आकाराच्या पेशी संघटितपणे फिरत असताना नजरेस पडतात. ही संहती स्वयंसंघटित झालेली असते.

ऱ्हासीय संरचनांतील एक अत्यंत विलक्षण संरचना रसायनशास्त्राच्या क्षेत्रात पाहावयास मिळते. बेलूसोव-झाबोतिन्स्की क्रिया या नावाने संबोधल्या जाणाऱ्या या गुंतागुंतीच्या क्रियेत होणारी मुख्य गोष्ट म्हणजे सल्फ्युरिक आम्लाच्या माध्यमात पोटॅशियम ब्रोमेटमुळे होणारे मेलॉनिक आम्लाचे ऑक्सिडेशन. या क्रियेत उत्प्रेरक (स्वत:मध्ये कोणताही बदल घडू न देता रासायनिक क्रियेला वेग येऊ देणारा पदार्थ) असते सिरियम सल्फेट. या क्रियेचे महत्त्वाचे वैशिष्ट्य म्हणजे येथे स्वयंउत्प्रेरण होते. स्वयंउत्प्रेरणात एखादा पदार्थ स्वत:च्याच



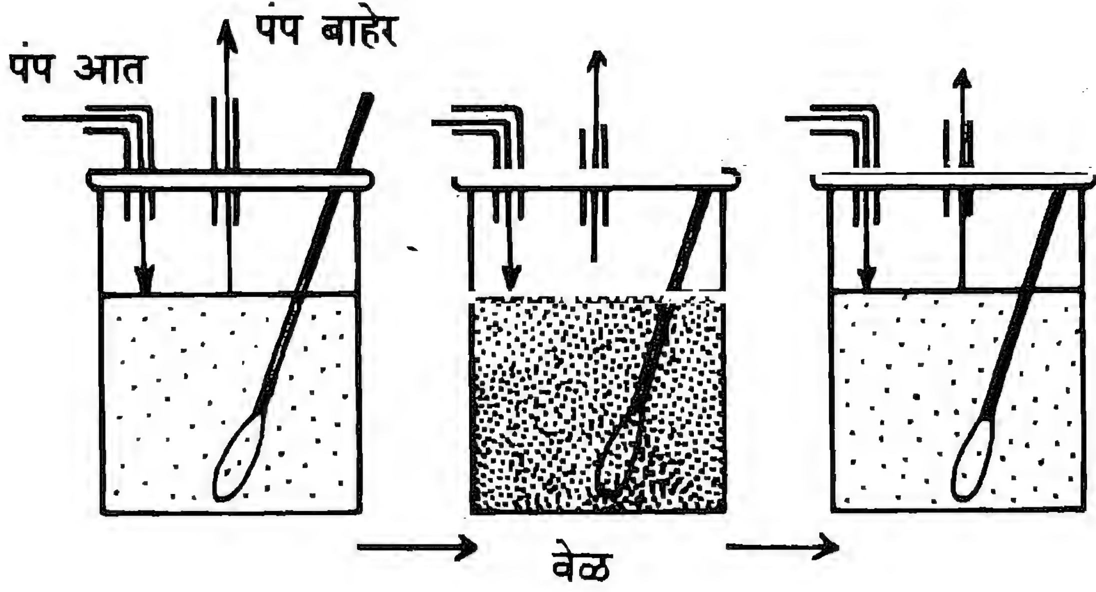
आकृती 16.3 : तापमान फरकाच्या एका विशिष्ट किमतीस स्थिर द्रवात अभिसरणाची हालचाल सुरू होते.

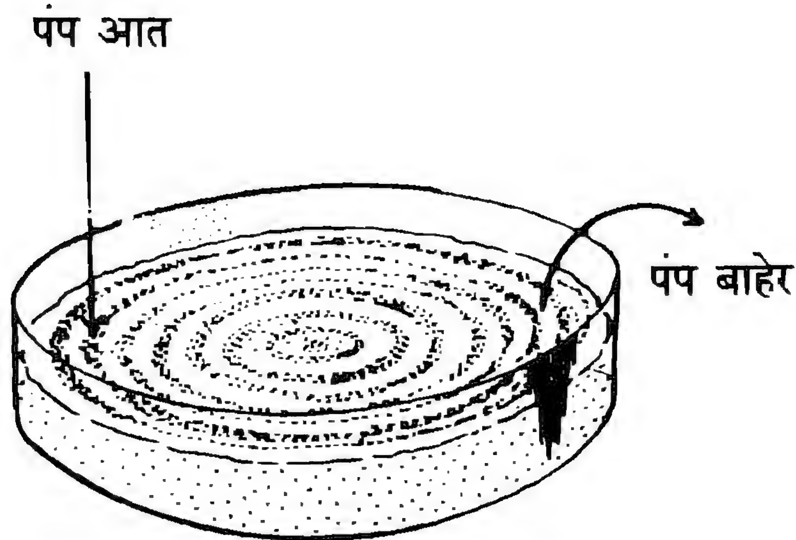
उत्पादनवाढीस हातभार लावतो. उघडच आहे की स्वयंउत्प्रेरणामुळे या रासायनिक संहतीमध्ये अरेषीयत्व निर्माण होते. ही संहती जेव्हा अलग व रासायनिक संतुलनात वा त्याच्या जवळपासच्या स्थितीत असते तेव्हा विशेष दखल घेण्याजोगे काही घडत नाही. परंतु जेव्हा ती संहती खुली असते आणि विशिष्ट रासायनिक घटकांची संहतीमध्ये सारखी आवकजावक चालू असते व मिश्रण नीट ढवळले जाते तेव्हा लक्षणीय गोष्टी घडू लागतात.

बाह्य घटकांची आवकजावक कमी पातळीवर असताना संहतीत कसलीही संरचना आढळत नाही. आवकजावकीचा वेग वाढत जाऊन संहती संतुलित स्थितीपासून अधिकाधिक दुरावली जाते तेव्हा एका निर्णायक टप्प्याला असंतुलित स्थितिरूपांतर घडून येते. एकाएकी Br^-च्या संहतनात (concentration) आणि Ce^{4+}/Ce^{3+} यांच्या सापेक्ष संहतनात आवर्ती बदल घडून येतात. विशिष्ट रंग वापरल्यास हे बदल अत्यंत ठळकपणे पाहताही येतात. द्रावणाचा रंग लाल-निळा-लाल असा नियमित बदलत राहतो, आणि याचा आंदोलनकाल साधारण एक मिनिटाचा आढळतो. म्हणजेच ही संहती एक 'रासायनिक घड्याळ' बनते. संहती संतुलनापासून अधिक दूर ढकलली तर हे घड्याळ व्यामिश्र आवर्ती हालचाली दर्शविते आणि अखेर प्रकरण 3 मध्ये अरेषीय लंबकाचे जे वर्णन केले आहे त्याच प्रकारे कोलाहलीय स्थितीत पोहोचते. (याला रासायनिक कोलाहल म्हणतात.) रासायनिक स्वयंसंघटन केवळ कालिक (म्हणजे कालसंबंधी) जडणघडणीपुरतेच मर्यादित नसते. उथळ, ढवळल्या न गेलेल्या बशांमध्ये अनेक व्यामिश्र अवकाशी (अवकाशसंबंधी) तसेच अवकाशी-कालिक आकृतिबंध तयार होतात - उदा. एखाद्या केंद्रापासून पसरत जाणारे कमी-जास्त घनतेचे तरंग; सर्पिल (spiral) आकृत्या वगैरे.

अरेषीय रासायनिक संहतींच्या गणितीय प्रतिमानांत ही गुणात्मक वैशिष्ट्ये नजरेस पडतात. एक खूप प्रसिद्ध प्रतिमान 'ब्रूसेलेटर' या नावाने ओळखले जाते. प्रिगोजिन

लेफेवर यांनी ते प्रथम तयार केले. याचा तपशील कळायला फार कठीण आहे, परंतु त्याचा मथितार्थ स्पष्ट आहे. समजा स्वयंउत्प्रेरण व परस्परउत्प्रेरण (X मुळे Y चे उत्पादन वाढणे व Y मुळे X चे वाढणे.) यामुळे रासायनिक संहतीत अरेषीयतेचा अंतर्भाव झालेला असेल तर त्या संहतीला रासायनिक संतुलनापासून दूर नेल्यास स्थलकालावकाशात आश्चर्यजनक असे स्वयंसंघटित आकृतीबंध तयार होतात. तसे पाहता स्वयंउत्प्रेरण व परस्परउत्प्रेरण ही





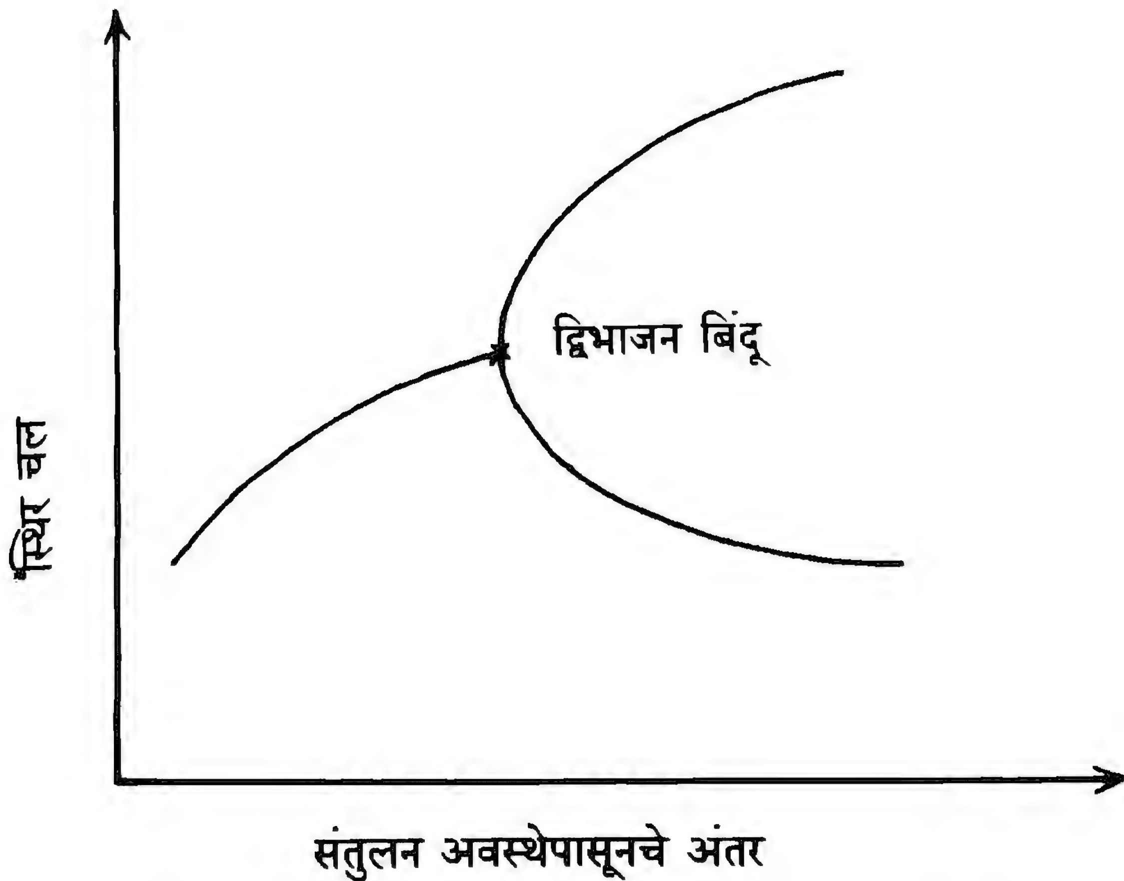
आकृती 16.4 : रसायनशास्त्रातील ऱ्हासीय संरचना. खूप असंतुलित रासायनिक संहती कालिक आकृतिबंध (रासायनिक घड्याळ) आणि अवकाशी आकृतिबंध (गतिमान वर्तुळाकार तरंग) दाखवितात.

शिष्ट्ये जीवरासायनिक क्रियांत सर्रास आढळतात. याचा अर्थ अगदी उघड आहे व नकाच खूप महत्त्वाचाही आहे. अशी शक्यता आहे की प्रिगोजिन व इतरांनी शोधून ढलेल्या अरेषीय रासायनिक संहतीत आढळणाऱ्या ऱ्हासीय संरचनांची अधिक गुंतीची व व्यामिश्र रूपे म्हणजेच सजीव संहती असाव्यात.

अशा प्रकारे अरेषीयता हे एक बीज मानता येईल. असंतुलित अवस्थेत असणाऱ्या तीत ह्या बीजामुळे फुलारून येणारे स्वयंसंघटन हे निसर्गाच्या सर्जनशीलतेचे प्रतीक आहे.

परंतु निसर्गाचे हे सर्जनक्षम मार्ग पूर्णांशाने निश्चिततावादी व भाकीतक्षम नाहीत. एका विशिष्ट तापमान फरकाच्या किमतीस स्थिर असलेल्या द्रवात एकाएकी अभिसरण प्रक्रिया सुरू होते, परंतु द्रवाचा एक विशिष्ट थेंब घड्याळाच्या काट्यांप्रमाणे गरगरेल की उलट्या दिशेने गरगरेल याचे भाकीत काही कोणी करू शकत नाही. अभिसरण सुरू होण्यापूर्वी त्या द्रवासाठी केवळ एकच स्थिती उपलब्ध असते. अभिसरण सुरू होण्याच्या रूपांतर बिंदूपाशी त्या संहतीसाठी दोन (वा अधिक) स्थिती उपलब्ध होतात. यापैकी प्रत्यक्षात कोणत्या स्थितीत ती संहती जाईल याचे भाकीत करणे येथे अंगभूतपणेच शक्य नसते.

गणिती पातळीवर याचे प्रतिबिंब उमटते ते पुढील गोष्टीत : मूलभूत अरेषीय डिफरेंशिअल (अवकल) समीकरणांना एकापेक्षा जास्त उत्तरे असण्याची शक्यता असते. समीकरणाची उत्तरे त्या समीकरणाचा प्रकार, त्यात असणाऱ्या विविध प्राचलांच्या किमती, तसेच त्याच्या सीमास्थितीवर अवलंबून असतात. सीमास्थिती खुल्या संहतीच्या पर्यावरणाशी होणाऱ्या परस्परक्रिया व त्यामुळे संहतीवर लादली जाणारी बंधने दर्शविते. जवळजवळ संतुलनअवस्थेत असणाऱ्या संहतीबाबत एकच उत्तर असते व ते स्थिर असते. पर्यावरणातील लहानसहान चढ-उतार आणि बदल परिणामकारक नसतात व ती संहती एकाच मार्गावर चिकटून राहते. संहती संतुलनअवस्थेपासून दूर जाऊ लागते तेव्हा एका विशिष्ट मर्यादेपलीकडे संहतीच्या समीकरणाची उत्तरे एकापेक्षा अधिक होतात. यातील प्रत्येक उत्तर हे सीमास्थितीतील लहानसहान बदलांविरुद्ध स्थिरच असते. परंतु ज्या बिंदूला एक-उत्तरीपासून अनेक-उत्तरी असा बदल घडून येतो तो बिंदू अस्थिर परिस्थिती दर्शवितो.



आकृती 16.5 : संहती संतुलन अवस्थेपासून दूर जाऊ लागते तशी एका विशिष्ट टप्प्यावर बिंदू) एका स्थिर शाखेचे अनेक शाखांत विभाजन होते.

हा बिंदू द्विभाजन बिंदू म्हणून ओळखला जातो. या बिंदूला पर्यावरणातील छोटे चढ-उतार, सीमास्थितीतील लहान बदल विस्तारित होतात आणि संहती शक्य असलेल्या वेगवेगळ्या मार्गांपैकी एका मार्गावर आरूढ होते. परंतु पर्यावरणीय बदल स्वैरपणे घडत असतात. त्यामुळे संहती नेमक्या कोणत्या मार्गावर जाईल याचे निश्चित भाकीत करणे शक्य नसते. परंतु एकदा का संहतीने एक मार्ग स्वीकारला की मग ती त्यावर स्थिर राहते - दुसरा द्विभाजन बिंदू येईस्तोवर. येथे पुन्हा भाकीतक्षमतेचा ऱ्हास होतो. असंतुलित संहतींच्या या प्रकारच्या वर्तणुकीचे प्रिगोजिन यांनी नामकरण केले आहे - 'चढउतारांतून सुव्यवस्था.'

अशा प्रकारची मर्मदृष्टी व अशा प्रकारचा ज्ञानसाक्षात्कार विज्ञानाच्या इतिहासात तसा दुर्मिळच. व्यामिश्र स्वयंसंघटन, स्वयंसंघटित संहतींचे स्थैर्य, परंतु त्याचबरोबर काही निर्णायक क्रांतिक टप्प्यावर असणारा भाकीतक्षमतेचा अंगभूत अभाव, उत्क्रांतीच्या मार्गावरील वैविध्यता (एकापेक्षा जास्त मार्ग उपलब्ध असणे), आणि याबाबतची पर्यावरणाची भूमिका - ह्या अशा गोष्टींनी आपल्याला आतापर्यंत कोड्यात टाकले होते. यातील बऱ्याचशा प्रश्नांची उत्तरे समजून घेण्याची किल्ली ऱ्हासीय संरचनेच्या कल्पनेत आहे असे वाटते. या नव्या रूपावलीचा (पॅरॅडाइमचा) वापर करून अनेक जीवशास्त्रीय ऱ्हासीय संरचनांच्या प्रतिमानांबाबत महत्त्वाचे ज्ञान प्राप्त झाले आहे. अर्थात मोठ्या दूरच्या मार्गक्रमणेतील ही सुरुवातीची छोटी पावलेच आहेत हे लक्षात ठेवले पाहिजे. प्रिगोजिन यांनी अजूनपर्यंत तरी जीवशास्त्र व भौतिकी यांचा मिलाफ नक्कीच घडवून आणलेला नाही. परंतु त्यांनी या दोहोंना एक समान भाषा, एक समान वैचारिक रूपावली मिळवून दिली आहे. आणि ही एक फारच महत्त्वाची कामगिरी आहे.

या व मागील प्रकरणातील कल्पनांचे विवेचन संदर्भ 7, 15, व 14 वर आधारित आहे.

सतरा

कोशकीय स्वयंयंत्रे

स्वयंसंघटन करणाऱ्या संहतींचे व्यामिश्र आकृतिबंध आपल्या सामोरे येतात ते लांबी व कालमापनाच्या स्थूलमानावरील मापप्रमाणात. रासायनिक घड्याळाचे विशिष्ट कालमापप्रमाण एक मिनिटाचे आहे. ऱ्हासीय रासायनिक संरचनांत आढळून येणाऱ्या अवकाशी आकृतिबंधांच्या लांबीचे मापप्रमाण सेंटीमीटरचे असते. जीवशास्त्रीय संहतीत याहून मोठ्या प्रमाणावर स्वयंसंघटन झालेले दिसून येते. परंतु ते आकृतिबंध ज्या सूक्ष्म पातळीवरील रेण्वीय प्रक्रियांतून घडून येतात त्यांची लांबी व कालमापप्रमाणे कितीतरी छोटी असतात. सापेक्षतावादाप्रमाणे सर्व परस्परक्रिया या स्थानिक स्वरूपाच्या असणे अत्यावश्यक आहे. संहतीचा एक भाग दुसऱ्या भागावर त्याच क्षणी, कालांतराशिवाय परिणाम वा क्रिया घडवून आणू शकत नाही. (याचे कारण प्रकाशाच्या वेगाला मर्यादा आहे व प्रकाशाच्या वेगापेक्षा अधिक वेग कशाचाच असत नाही) असे असताना संहतीचे वेगवेगळे, अवकाशात एकमेकांपासून दूर असलेले भाग एकाचवेळी परस्पर सुसंगतपणे नियमन केल्यागत वागताना कसे दिसतात? स्वयंसंघटन करणाऱ्या संहतींत स्थलकालात मोठ्या दीर्घ प्रमाणावरची सुव्यवस्था कशी आढळून येते?

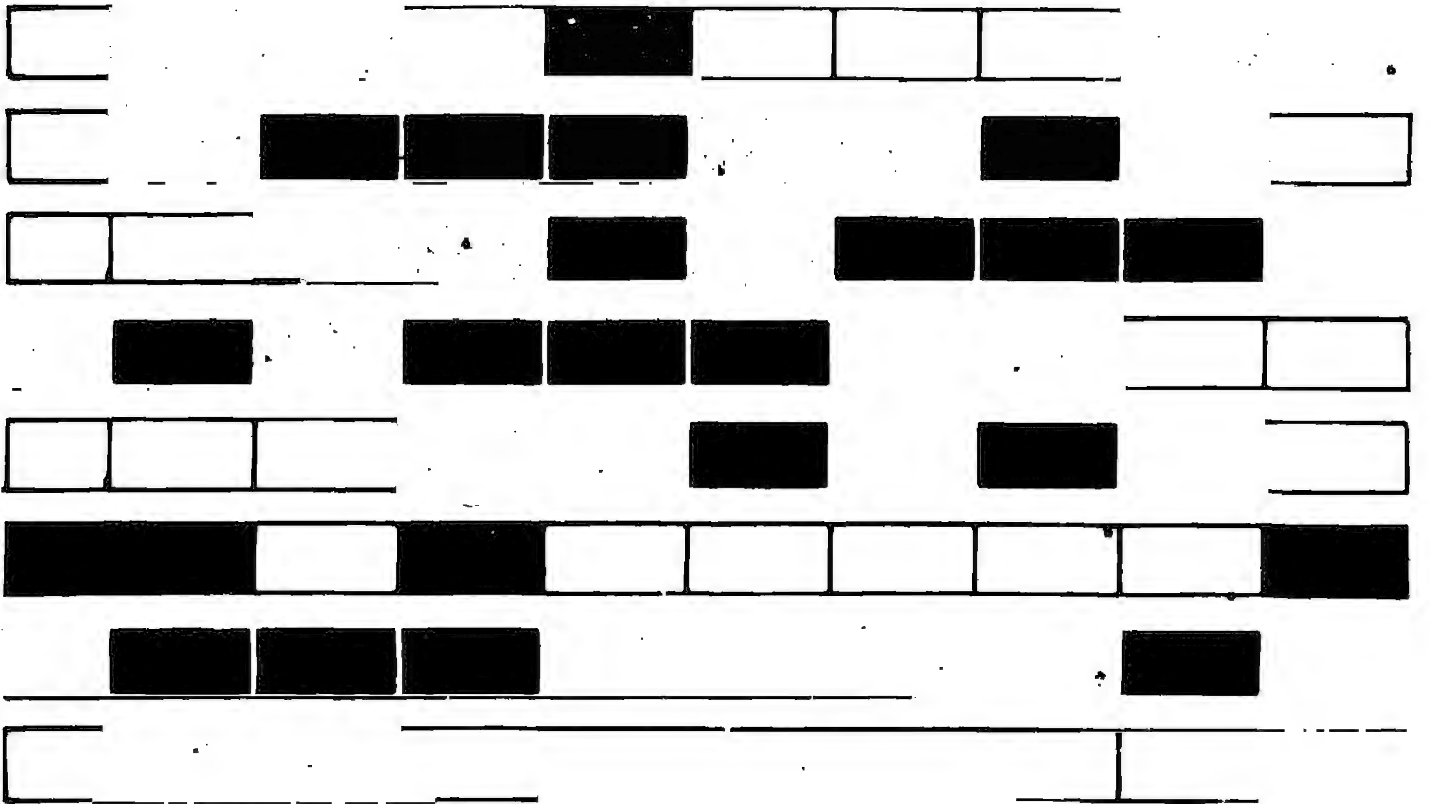
या प्रकारचे प्रश्न काही नवीन नाहीत. तसे म्हटले तर नेहमीच्या सर्वसाधारण ऊष्मागतिकीत उद्भवणाऱ्या संरचना बघितल्या (उदा. द्रव ते घन स्थिती वा अचुंबकीय ते चुंबकीय स्थिती असे बदल) तर त्यांची बारकाईने तपासणी झाली आहे. सुमारे दोन दशकांपूर्वी लिओ कदानोफ, मायकेल फिशर व केनेथ विल्सन यांनी केलेल्या मूलभूत संशोधनामुळे हे शक्य झाले आहे. या संशोधनातून बाहेर आलेला महत्त्वाचा मुद्दा म्हणजे स्थितिरूपांतर होत असतानाच्या क्रांतिक, निर्णायक बिंदूजवळ आढळणारी वैज्ञानिक नियमांची मापप्रमाण निश्चलता. या नियमांत कोणतीही विशिष्ट लांबी येत नाही. बर्फाचा स्फटिक वा लोहचुंबक कोणत्याही आकाराचा असू शकतो. क्रांतिक बिंदूच्या आसपास संहतीचे अनेक गुणधर्म साधे घातांकी नियम पाळतात आणि विविध प्रकारच्या रूपांतरांबाबतही सारख्याच प्रकारचे वैश्विक घातांक आढळतात. ऊष्मागतिकी संतुलनातील व स्वयंसंघटन करणाऱ्या संहतींसंबंधी बरेच ज्ञान आतापर्यंत प्राप्त झाले असले तरी त्यातून

रेणूंच्या पातळीवर काय चालते याची तपशीलवार माहिती वा वर्णन काही मिळत नाही. याशिवाय संतुलित संरचना व ऱ्हासीय संरचना यांच्यात एक मूलभूत फरक आहे. ऱ्हासीय संरचनांशी स्थूलपातळीवरील विशिष्ट लांबी व कालावधी निगडित असतात. संहतीतील महत्त्वाची प्राचले ही विशिष्ट लांबी व कालावधी निश्चित करतात. पण सुरुवातीचा तो प्रश्न शिल्लक राहतोच : रेणूंमधील स्थानिक स्वरूपाच्या परस्परक्रिया अब्ज-अब्ज रेणूंच्या महाप्रचंड समूहात विशिष्ट आकारांच्या व्यापक प्रमाणावरील संरचना आणि सुसंगत, संसंजी (coherent) आकृतिबंध कशा प्रकारे निर्माण करू शकतात?

हा प्रश्न फार कठीण आहे हे उघडच आहे. खरे म्हणजे पूर्ण वास्तववादी पद्धतीने तो हाताळणे अशक्यच आहे. त्यामुळे सुरुवात म्हणून आपण सोपी, पृथक स्वरूपाची प्रतिमाने घेऊ. ही प्रतिमाने वर उल्लेखलेल्या संहतींचे अनुकरण करतात असा बहाणा करण्याचेही कारण नाही. अब्ज-अब्ज रेणूंऐवजी आपल्याला हाताळणे जमेल अशा छोट्या संख्यांचाच विचार करू - म्हणजे 10, 20 वा 50 वगैरे. स्थल-अवकाशात त्यांची रांगोळीच्या ठिपक्यांसारखी जाळीदार मांडणी करू. रेणूंच्या हालचालींचे वर्णन करण्यासाठी जरूर असणाऱ्या अनेक सलग चलांनाही आपण विसरून जाऊ आणि प्रत्येक रेणू काही थोड्याच पृथक स्थितींमध्ये असू शकतो असे मानू. प्रत्यक्षातील रेणू-रेणूंमधील परस्परक्रियाही बाजूस ठेवू आणि त्याऐवजी काळानुसार रेणूची स्थिती कशी बदलत राहील याबद्दलचे काही साधेसोपे स्थानिक स्वरूपाचे नियम तयार करू. एकंदरीत गोष्टी सुलभ व्हाव्यात व संगणकावर काम करणेही सोपे व्हावे म्हणून काळसुद्धा सलग न धावता पृथकपणे पायरी पायरीने 0, 1, 2..... असा पुढे जातो असेही मानू आणि मग सुरुवातीस त्या रेणूंची मांडणी एका विशिष्ट स्थितीत करून काळानुसार ती मांडणी कशी बदलत जाते याचे निरीक्षण करू. हा निव्वळ एक संगणकीय खेळ आहे; निसर्गाचे प्रतिमान तयार करण्याचा येथे अजिबात प्रयत्नही नाही. परंतु यातूनही ज्या गोष्टी ध्यानात येतात त्या बघितल्यावर कळून चुकते की हा खेळ खेळणे खरोखरच खूप महत्त्वाचे आहे.

या प्रकारच्या पृथक संगणकीय प्रतिमानांना 'कोशकीय स्वयंयंत्रे' असे संबोधले जाते. जॉन फॉन नॉयमान हे प्रतिभावंत गणिती या कोशकीय स्वयंयंत्रांचा प्रथम वापर करणाऱ्यांतील एक. निसर्गात आढळते त्या प्रकारची अवकाशी संरचनांतील व्यामिश्रता या प्रतिमानांतून तयार करता येते का याचा शोध फॉन नॉयमान घेत होते. एक-मितीय कोशकीय स्वयंयंत्र म्हणजे कोशांची एका रांगेतील मांडणी असते, आणि प्रत्येक कोश एखादा क्रमांक वा अन्य गुणधर्म याद्वारे ओळखला जातो (उदा. कोशाचा रंग काळा, पांढरा वा करडा असू शकतो). द्विमितीय कोशकीय स्वयंयंत्र म्हणजे कोशांची एका प्रतलातील, पातळीतील मांडणी असते; ती आयताकृती, षट्कोनी वा अन्य एखाद्या प्रकारची असू शकते. या स्वयंयंत्राची आरंभस्थिती दिलेली असते. काही ठरावीक स्थानिक स्वरूपाच्या नियमांनुसार काळाच्या दर एकांकाला या स्वयंयंत्राच्या स्थितीत बदल होतो. असे काही साधे स्थानिक नियम मिळालेले आहेत की त्यानुसार होणारी स्वयंयंत्राची वाटचाल मात्र अत्यंत व्यामिश्र आकृतिबंध उलगडत जाते.

उदाहरणार्थ, दहा कोश असलेल्या एकमितीय स्वयंयंत्राची कल्पना करा. यातील प्रत्येक कोश एकतर भरलेला असेल (काळ्या रंगाने दाखविलेला) वा रिकामा असेल. हीच बाब आकड्यांत सांगायची तर प्रत्येक कोशाला क्रमांक असेल - 0 किंवा 1. आता आपण एक (स्थानिक) नियम गृहीत धरू - प्रत्येक कोशातील काळाच्या एका एकांकानंतर बदलणारा नवा क्रमांक हा कोशातील आधीचा क्रमांक व त्याच्या उजवीकडील कोशातील क्रमांक यांची बेरीज असते आणि ही बेरीज द्विमानपद्धतीनेच होते (म्हणजे $0+0=0$, $0+1=1+0=1$, $1+1=0$,). एखाद्या प्रारंभस्थितीपासून सुरुवात करून वरील नियमांचा वापर केला की हे स्वयंयंत्र आकृती 17.1 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे उत्क्रांत होत जाते. प्रारंभस्थिती आणि बदलाचा नियम यानुसार एकमितीय स्वयंयंत्रांत अनेकविध आकृतिबंध निर्माण होतात : अनियमित वाढ आणि खुरटणे, अदृश्य वा नाहीसे होणे, अपूर्णमित संरचना निर्माण होणे, इत्यादी घडू शकते.



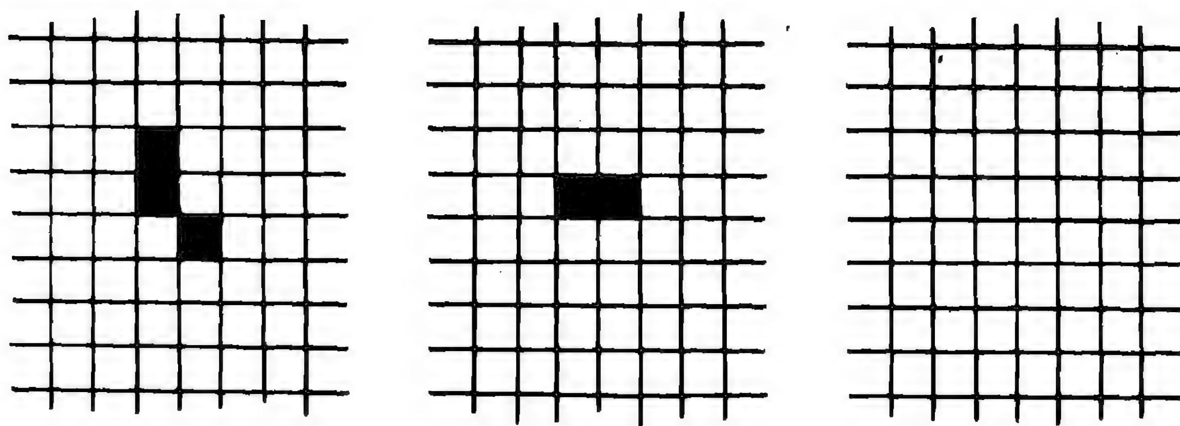
आकृती 17.1 : एका स्थानिक नियमानुसार उत्क्रांत झालेले एक-मितीय कोशकीय स्वयंयंत्र.

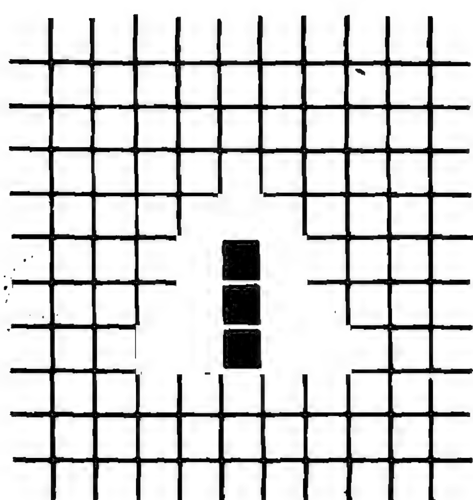
द्विमितीय स्वयंयंत्रांमध्ये निर्माण होणारे आकृतिबंध तर यापेक्षा कितीतरी पट अधिक व्यामिश्र असू शकतात. जॉन कॉनवे या गणितज्ज्ञाने निर्माण केलेला 'जीवन' नावाचा खेळ द्विमितीय स्वयंयंत्राचे बरेच प्रसिद्ध उदाहरण आहे. या खेळात आपण कोशांची चौरस मांडणी घेतो. प्रत्येक कोश एकतर 'जिवंत' वा 'मृत' असतो. प्रत्येक कोशाला आठ शेजारी असतात. काळाच्या एका एकांकानंतर प्रत्येक कोशाची स्थिती कशी बदलते हे ठरविणारे 'जीवना'चे नियम फारच सोपे आहेत - जिवंत कोशाचे दोन वा तीन शेजारी जिवंत असतील तर तो जिवंत राहतो, अन्यथा मृत होतो; आणि बरोबर तीन शेजारी जिवंत असतील तर मृत कोश जिवंत होतो. या नियमांनुसार काही प्रारंभस्थितींत घडून येणाऱ्या स्वयंसंघटनाचे स्वरूप विश्वास बसणार नाही इतके समृद्ध आढळते. 'जीवना'त अशा काही संरचना ('जीव')

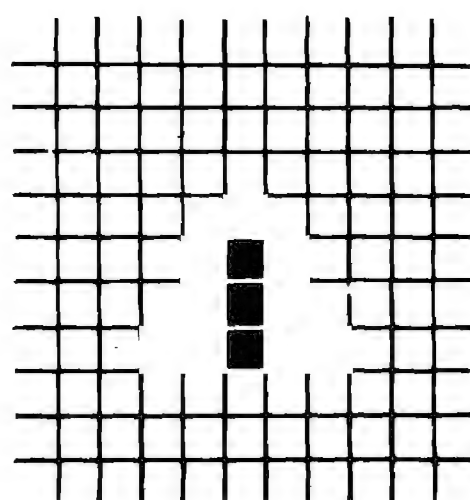
आढळतात की त्यांच्या हालचाली व उत्क्रांती प्रत्यक्ष सजीवाच्या लक्षणांचीच गमतीशीर रूपके वाटतात : सहकार्य, लढाई, पुनरुत्पादन, वाढ, ऱ्हास इ.

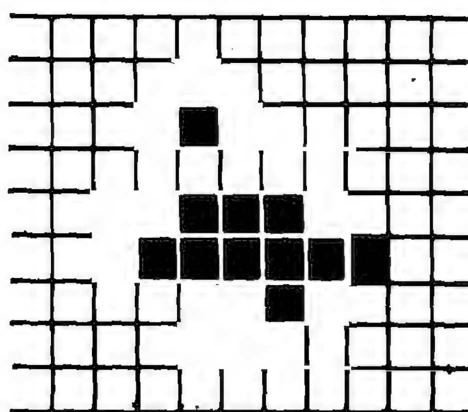
वैयक्तिक संगणक हाताशी असणारी कोणीही व्यक्ती स्वत: रचू शकेल अशा प्रकारचे हे बालिश खेळ आहेत, असे म्हणून या शोधांकडे तुच्छतेने बघणे ही मोठी चूक ठरेल. स्थानिक स्वरूपाचे नियम तसे अगणित प्रकारे रचणे शक्य आहे. कॉनवे यांनी मांडलेले नियम म्हणजे या असंख्य शक्यतांतील नियमांचा केवळ एक सट. या असंख्य शक्यतांतील जवळजवळ सर्व नियम केवळ अनियमित व कसलेही खास वैशिष्ट्य नसणाऱ्या हालचाली घडवून आणतात. एखाद्या विशिष्ट संदर्भात महत्त्वपूर्ण ठरेल अशा प्रकारची रचना घडवून आणणारे नियम निवडायचे तर त्यासाठी प्रचंड कौशल्य, सराव व विश्लेषणक्षमता यांची आवश्यकता असते. आकृती 17.2 मध्ये 'जीवना'च्या नियमांतून उद्‌भवणाऱ्या काही महत्त्वाच्या रचना दाखविल्या आहेत. द्रवातून वेगाने प्रवास करणाऱ्या घनाकृतीभोवतालच्या प्रवाहाचे आकृतिबंध, अभिसरण क्रिया, वनस्पती व प्राणी यांच्यातील आकृतिबंधांची निर्मिती वगैरे प्रक्रियांचे विश्लेषण करणे एरवी खूपच कठीण असते. पण अशा प्रक्रियांची बतावणी (simulation) करून त्यांचा अभ्यास करण्यासाठी कोशकीय स्वयंयंत्रांचा वापर मोठ्या प्रमाणावर केला गेला आहे. खूप कठीण फले (functions) असणाऱ्या आकडेमोडी करण्यासाठीही यांचा वापर झाला आहे. यापैकी काही उदाहरणांत तर स्थानिक स्वरूपाचे नियम निश्चिततावादी असण्याचीही गरज नसते - स्वैर बदलणारे घटक त्यात अंतर्भूत असू शकतात.

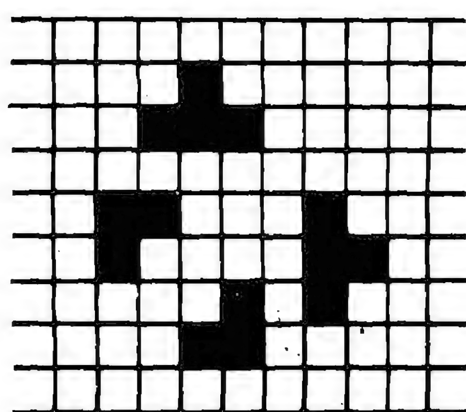
निसर्गातील सर्वोच्च दर्जाचे स्वयंसंघटन आढळते ते मानवी मनातील जाणिवेच्या प्रक्रियेत. मानवी मेंदूत मज्जातंतू म्हणून ओळखल्या जाणाऱ्या पेशी लक्ष-लक्ष कोटी इतक्या प्रचंड संख्येने असतात. शिकणे, विचार करणे, जाणून घेणे, लक्षात ठेवणे वगैरेंना आपण मानसिक प्रक्रिया म्हणतो. या मानसिक प्रक्रियांशी जुळणाऱ्या भौतिक प्रक्रियांचा शोध घेतला तर असे म्हणणे वाजवी ठरेल की प्रत्येक मज्जातंतूची वैयक्तिक स्थिती नव्हे तर एकूण मज्जातंतू समूहातील *व्यापक सर्वसाधारण* आकृतिबंधच ह्या भौतिक प्रक्रिया दर्शवितो. 'मज्जातंतू जाळी' म्हणून संबोधल्या जाणाऱ्या रचना या अशा प्रक्रियांचे अनुकरण करण्यासाठी तयार केल्या आहेत. प्रत्यक्षातील मज्जातंतू समूहांच्या गुंतागुंतीपुढे या रचना फारच प्राथमिक स्वरूपाच्या आहेत, परंतु कोशकीय स्वयंयंत्रांच्या मात्र त्या खूपच व्यामिश्र पातळीवरच्या आवृत्त्या म्हणाव्या लागतील. मज्जातंतू जाळ्यात काही शेकड्यांनी मज्जातंतू असतात व त्यातील प्रत्येकाच्या दोनच स्थिती असू शकतात - उघडलेली वा मिटलेली. काळाच्या प्रत्येक पावलानंतर प्रत्येक मज्जातंतू कोणत्या स्थितीत येणार हे त्या मज्जातंतूचे जे अनेक शेजारी मज्जातंतू असतात त्यांच्या स्थितींवर अवलंबून असते आणि हे अवलंबित्व खूप गुंतागुंतीचे असले तरी निश्चित प्रकारचे असते. या जाळ्यातील विविध प्राचलांच्या (उदा. आंतरमज्जातंतू संबंधांची तीव्रता) किमती सलगपणे बदलू शकतात. मज्जातंतूंच्या उघडमिटीच्या नियमांत स्वैर बदलांना वाव दिल्यास या जाळीत गोंगाटालाही स्थान मिळते. अशा संहतींची संगणकीय प्रतिमाने चालवून बघितली की त्यातून अनेक आश्चर्यकारक

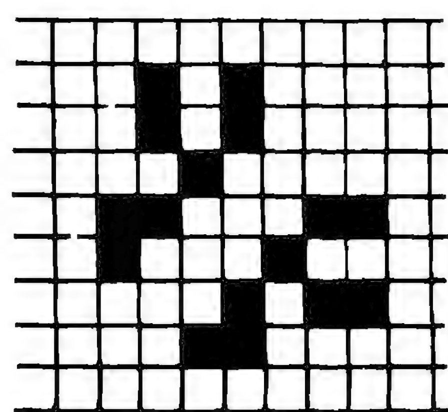


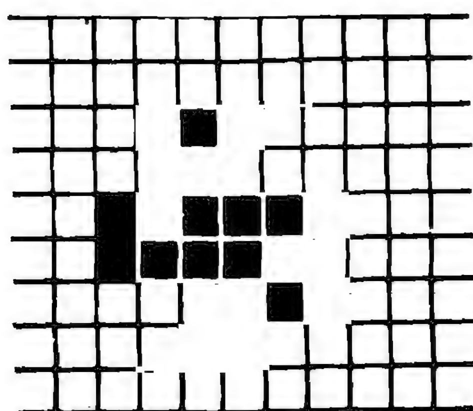


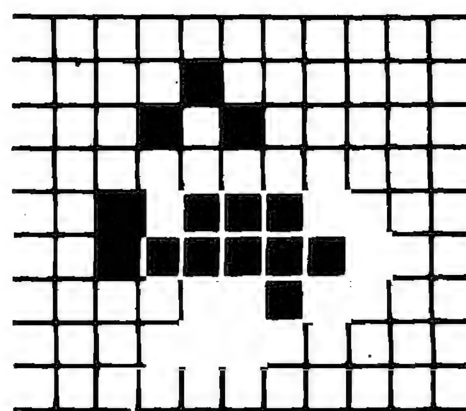












आकृती 17.2 : 'जीवना'ने तयार केलेले काही आकृतिबंध

स्वयंसंघटनाची लक्षणे प्रकट होतात. शिकणे, ओळखणे, स्मृती ठेवणे अशा प्रकारच्या मानसिक क्रियासदृश वर्तणूक व्यापक पातळीवर दाखविणाऱ्या मज्जातंतू जाळ्या निर्माण करण्याचे कौशल्यही संशोधकांनी दाखविले आहे.

कोशकीय स्वयंयंत्रे, मज्जातंतू जाळ्या व तत्सम 'जाळीस्वरूप वायू' अशी प्रतिमाने निसर्गातील संहतींचे समाधानकारक अनुकरण कदाचित कधीच करू शकणार नाहीत. परंतु तरीही हे मान्य करावेच लागेल की त्या प्रतिमानांनी काही महत्त्वाचे धडे आपल्या नजरेस आणून दिले आहेत. स्वयंयंत्रातील कोशाची स्थिती ठरीव पद्धतीने बदलत नाही. ती शेजारील कोशांच्या स्थितींनुसार बदलते, तसेच शेजारील कोशांवर परिणामही घडवून आणते. या प्रकारच्या एकमेकांत गुंतलेल्या पश्चभरणामुळे (फीडबॅक) या स्वयंयंत्रांच्या उत्क्रांती-नियमात अरेषीयता अंगभूतच असते. येथे स्वयंसंघटनाची वैशिष्ट्ये आढळून येतात ही गोष्टसुद्धा भौतिकी व रसायनशास्त्रातील ऱ्हासीय संरचनांत आधी आढळलेल्या निष्कर्षास पुष्टी देणारीच आहे : अनुरूप परिस्थितीत अरेषीयता स्वयंसंघटन जन्माला घालते. येथे आणखी एक मुद्दा नोंदला पाहिजे. बरीचशी स्वयंयंत्रे ज्या नियमांनुसार उत्क्रांत होतात ते नियम कालमितीबाबत सममित नसतात. भौतिकीतील मूलभूत नियमांच्या काल-सममित स्वरूपाच्या विरोधात जाणारी ही परिस्थिती आहे. असे काल-असममित नियम स्वयंयंत्रांत स्वयंभू, स्वयंसंघटक रचना सहज जन्माला घालतात ही गोष्ट फारच महत्त्वाची असून त्यामुळे एक विचार मनाला भुरळ घालत राहतो - निसर्गात आढळणारे स्वयंसंघटन जर भौतिकी नियमांद्वारे विशद करायचे असेल तर सध्याच्या भौतिकीतील सूक्ष्मपातळीवरील नियम बदलणे आवश्यक ठरावे. हा निष्कर्ष प्रिगोजिन यांनी घेतलेल्या भूमिकेशी मिळताजुळताच आहे. प्रिगोजिन यांच्या मते निसर्गात आढळून येणाऱ्या अप्रत्यावर्तनीयतेचे मूळ त्याच्या मूलभूत नियमांतील काल-असममितीत असले पाहिजे. ''अप्रत्यावर्तनीयता एकतर सर्वच पातळ्यांवर लागू असली पाहिजे किंवा ती कोणत्याच पातळीवर सत्य असता कामा नये. एका पातळीवरून दुसऱ्या पातळीवर जाताना चमत्कार झाल्यासारखी ती एकाएकी प्रकट होऊ शकत नाही.'' या कल्पनेभोवती एक गुंतागुंतीचा तपशीलवार सिद्धान्तही रचला गेला आहे. परंतु अजूनही तो निव्वळ तर्काच्या पातळीवरच असून वास्तवात अनुभवाने सिद्ध झालेला नाही.

परंतु कोशकीय स्वयंयंत्रांचा खरा संदेश हा जितका सखोल व महत्त्वाचा आहे तितकाच तो पारदर्शीही आहे. स्वयंयंत्रांत आपल्याला साधेसोपे व स्थानिक स्वरूपाचे नियम आश्चर्यकारक अशा सर्वव्यापी व सार्वत्रिक आकृतिबंधांची आणि स्वयंसंघटनाची निर्मिती करताना आढळतात. स्वयंयंत्रांच्या नियमांत कोणतेही नैसर्गिक स्थूलमानावरील लांबीचे मापप्रमाण नसते आणि तरीही हे स्थानिक स्वरूपाचे नियम आपल्या आवर्ती वापराने विशिष्ट आकारमान अंतर्भूत असलेली दीर्घ पल्ल्याची सुव्यवस्था व नियमबद्धता निर्माण करतात. *म्हणजेच सर्वव्यापी सुव्यवस्था तयार करण्यासाठी सर्वव्यापी नियमाची काही आवश्यकता नाही.* ही गाभ्याकडे नेणारी मर्मदृष्टी जर निसर्गातील व्यामिश्र संहतींना लागू केली तर त्याचा अर्थ अक्षरशः थरारून सोडणारा आहे. एखाद्या जीवशास्त्रीय संरचनेतील स्वयंसंघटन, भिन्न

भिन्न भागांतील सुसंवादीपणा, आणि एकसूत्रता यांच्या निर्मितीसाठी कोणत्याही किचकट सर्वव्यापी मास्टर प्लॅनची गरज नाही. या गोष्टी योग्य अशा स्थानिक स्वरूपाच्या नियमांच्या आवर्ती उपयोगातून निर्माण होतात. अरेषीय स्थानिक स्वरूपाचे नियम, आवर्तने, सीमाबंधने आणि चढ-उतार ह्या गोष्टी विश्वातील सर्जनशीलतेच्या कार्यकारी शक्ती आहेत, साधने आहेत.

हे विवेचन संदर्भ 7, 15 आणि 21 वर आधारित आहे.

अठरा

जीवनरहस्य

भौतिकी व रसायनशास्त्रातील ऱ्हासीय संरचनांची संकल्पना आता प्रस्थापित विज्ञानाचा एक भाग म्हणून स्वीकारली गेली आहे. परंतु या संकल्पनेचे खरे महत्त्व वेगळेच आहे. तिने जीवशास्त्रासाठी एक नवी भाषा, एक नवी रूपावली (पॅरॅडाइम) उपलब्ध करून दिली आहे. परंतु ही रूपावली जीवनाचा उगम, वाढ व उत्क्रांती अशा मूलभूत प्रश्नांना सामोरी जाण्यास समर्थ आहे काय? जीवनाच्या कोड्याला वैज्ञानिक पातळीवरचे उत्तर या संकल्पनेतून मिळू शकेल काय?

जीवनाच्या कोड्यात टाकणारी, गूढ असणारी लक्षणे कोणती? सजीवांमध्ये संघटन व अंतर्गत नियमन अशा भन्नाट उच्च पातळीचे आढळून येते की त्यापुढे अभिसरण प्रवाहातील वा रासायनिक घड्याळ्यातील संरचना अगदीच थिट्या व क:पदार्थ वाटू लागतात. धुळीचा कण डोळ्यात शिरल्यावर पापणी मिटण्याची प्रतिक्षिप्त क्रिया विचारात घ्या. या अतिशय साध्या गोष्टीसाठीसुद्धा अनेक शरीरांतर्गत प्रतिक्रियांची गुंतागुंतीची जुळवाजुळव करणे आवश्यक असते. याशिवाय लक्षात घेण्याची आणखी एक गोष्ट म्हणजे संघटनक्रियेत एकमेकांत गुंतलेली पातळ्यांची उतरंड आढळून येते. उदाहरणार्थ, आपल्या भावनिक वर्तणुकीची जुळवाजुळव होताना तिला खालच्या पातळीवरील शारीरिक वर्तणूकीचा आधार असतो, आणि या शारीरिक क्रिया अत्यंत गुंतागुंतीच्या जीवरासायनिक प्रक्रियांच्या जुळवाजुळवीतून प्रकट झालेल्या असतात; आणि अधिक मूलभूत पातळीवर या जीवनरसायनिक प्रक्रिया असंख्य रेणूंच्या सहकार्यातून होणाऱ्या संरचनांमधून घडून येतात. अत्यंत व्यामिश्र बहुस्तरीय संघटन व नियमन येथे घडलेले असते आणि ही गुंतागुंत पाहूनच अनेकांच्या मनात अशी भावना निर्माण होते की जीवनात भौतिकीतील आंधळ्या बलांच्या प्रभावाखाली फिरणाऱ्या असंख्य रेणूंच्या हालचालींपेक्षा अधिक काहीतरी नक्कीच असले पाहिजे.

परंतु केवळ व्यामिश्रता हे काही जीवनाविषयी वैज्ञानिक स्पष्टीकरण देण्याच्या प्रयत्नापासून दूर हटण्याचे कारण होऊ शकत नाही. तसे पाहता आज जे व्यामिश्र व अपारदर्शक वाटते आहे ते उद्या सोपे व पारदर्शक होऊ शकते. प्रोटीन व न्यूक्लेइक ॲसिड यांच्या संरचना, शरीरात प्रोटीन्स तयार करण्यासाठी जनुकांत साठविलेली माहिती कशा

प्रकारे वापरली जाते ह्याचा शोध - म्हणजेच जनुकीय सांकेतिक लिपीची फोड करणे, हे प्रश्न एकेकाळी आत्यंतिक गुंतागुंतीचे वाटत होते. परंतु आता रेण्वीय जीवशास्त्राच्या अथक रेट्यापुढे ते हळूहळू उलगडू लागले आहेत. तसे म्हटले तर निसर्गातील खूप असंतुलित स्थितीत असणाऱ्या खुल्या संहतींत स्वयंसंघटन घडून येण्याची शक्यता 'ऱ्हासीय संरचनांच्या' रूपावलीत सध्याच स्पष्ट झालेली आहे. जीवशास्त्रीय संहती खुल्या असून पर्यावरणाशी ऊर्जा व पदार्थाची देवाणघेवाण करत असतात हे उघडच आहे आणि खूप असंतुलित स्थितीत त्यात कितीही गुंतागुंतीच्या पातळीवरील स्वयंसंघटन, तात्त्विकदृष्ट्या तरी, होऊ शकते.

व्यामिश्रतेपेक्षाही अधिक कोड्यात टाकणारे आणखी एक वैशिष्ट्य जीवशास्त्रीय संहतीत आढळते. अशा संहतीच्या क्षणाक्षणाच्या बदलत्या वागणुकीचे भाकीत करणे काही शक्य नसते; परंतु या संहतीच्या एकूण गोळाबेरीज वागणुकीत काही निश्चित, भाकीत करता येणारे आकृतिबंध आढळून येतात. लहानसहान चढउतार व बदल या संहतीला बहुधा फार भरकटवत नाहीत. प्रारंभीच्या अल्पकालीन भरकटीनंतर ती संहती आपल्या मूळ संथ स्थितीत परतते. स्थानिक, तात्कालिक पातळीवर अनिश्चितता आणि व्यापक पातळीवर मात्र स्थिरता हे सजीवांच्या वागणुकीचे वैशिष्ट्य कोड्यात टाकणारे असले तरी कल्पनेच्या पलीकडचे निश्चितच नाही. कोलाहलीय गतिशास्त्रातील 'अनोखे कर्षक' नेमकी हीच वैशिष्ट्ये दाखवितात. जीवनातील अपरिहार्यता आणि संभवनीयता यातील द्वैताचा प्रश्न मानवीसंस्कृतीइतकाच जुना आहे. या प्रश्नाचे उत्तर नाही तरी उत्तराची दिशा वा झलक अरेषीय विज्ञानाद्वारे प्राप्त होते.

आकारजनन वा आकारनिर्मिती म्हणजे अभिन्नस्वरूपी गर्भाचे खूप विभिन्नस्वरूपी संरचनेत (बालकात) होणारे रूपांतर - ही प्रक्रिया जीवनाचा वैज्ञानिक दृष्टीने वेध घेण्याच्या प्रयत्नापुढील एक मोठी जटिल समस्या आहे. या येथील पेशींना कसे कळते की त्यांना फुफ्फुसात रूपांतरित व्हायचे आहे? आणि त्या तेथील पेशींना कसे कळते की त्यांची वाढ एका डोळ्यात होणार आहे? असे वाटते की येथे एखादी योजना, एखादा उद्देश, एखादा सर्वव्यापी आराखडा कार्यरत आहे आणि जरी गर्भाच्या प्रत्येक भागातील डीएनए हे जनुकीय रेणू एकसारखेच असले तरी ही योजना, हा उद्देश वेगवेगळ्या भागांना वेगवेगळे वागायला भाग पाडतो. रेण्वीय जीवशास्त्र या प्रक्रियेचे सूक्ष्मपातळीवरील स्पष्टीकरण देण्याचा प्रयत्न करते. यातील एक महत्त्वाची कल्पना म्हणजे अनुक्रमाने होणारे 'जनुकांचे कार्यबदल'. नियमन तसेच घडण करणाऱ्या जनुकांच्या क्रिया एका निश्चित कालक्रमाने बदलत जातात. अन्य जनुकांच्या कार्याचे नियमन व जुळवाजुळव करणारी 'मुख्य जनुके' असतात. दुसऱ्या शब्दांत सांगायचे तर त्या संहतीत एक तपशीलवार जनुकीय कार्यक्रम अंतर्भूत असतो व त्या कार्यक्रमाच्या उलगडण्यानुसार संहती एका ठरलेल्या मार्गाने जाते. ही सर्व चांगलीच डोळ्यात भरण्याजोगी प्रगती आहे, परंतु तरीही त्यातून भौतिकीतील मूलभूत प्रश्नाचे उत्तर हाती लागत नाही. सुरुवातीस एकजिनसी असणाऱ्या पदार्थाचे रचनात्मक व कार्यात्मक वैविध्यता असणाऱ्या संहतीत होणारे रूपांतर कसे घडून येते?

प्रिगोजिन यांच्या रूपावलीत या प्रश्नाला हात घालण्याची चांगली क्षमता आहे, कारण यात स्थानिक पातळीवरील परस्परक्रियांतून सार्वत्रिक स्वरूपाच्या संरचना निर्माण होऊ शकतात. गर्भ ही एक खुली संहती असून पर्यावरणाशी होणाऱ्या सततच्या पदार्थ व ऊर्जेच्या देवाणघेवाणीमुळे ती फारच असमतोल स्थितीत असते. स्वयंउत्प्रेरण आणि परस्परउत्प्रेरण असणाऱ्या जीवरासायनिक क्रिया रासायनिक ऱ्हासीय संरचनेसाठी आवश्यक असणारी अरेषीयता निर्माण करतात. दाटपणा, तापमान, रसायनप्रवाहांचा वेग अशासारख्या प्राचलांवर रासायनिक क्रिया अवलंबून असते. अशा प्राचलांच्या क्रांतिक उंबरठ्यावर (द्विभाजन बिंदू) एकजिनसी स्थितीपासून झालेला छोटासा स्वैर बदलही झपाट्याने वाढत जातो आणि ती संहती एकाएकी स्वयंसंघटित स्थितीत प्रवेश करते. या स्थितीत आधीची सममिती उत्स्फूर्तपणे तोडली जाते (उदा. वेगवेगळ्या भागात वेगवेगळी घनता निर्माण होते) आणि अंतर्गत विभिन्नता असलेली संरचना आकारास येते. सारखेच डी. एन. ए. असलेले वेगवेगळे भाग वेगवेगळ्या प्रकारे वाढतात याचे कारण त्यांच्याभोवतीचे रासायनिक वातावरण वेगवेगळे असते. क्रमाने येणारी विभाजने वेगवेगळ्या क्रांतिक उंबरठ्यांवर घडून येतात आणि अशा रीतीने गर्भाचे वेगवेगळे भाग वेगवेगळी स्वरूपे धारण करतात, व त्यांची कार्येही वेगवेगळी होतात. गर्भाची वाढ सारखी व सलगपणे न होता अलगपणे, एकाएकी होणाऱ्या बदलांच्या स्वरूपात होते असे सर्वसाधारण निरीक्षण आहे. वर रेखाटलेले चित्र याच्याशी बऱ्यापैकी जुळून येते.

मात्र या चित्रात एक गंभीर समस्या आहे. सर्वसाधारणपणे द्विभाजन बिंदूला संहतीपुढे अनेक वाटांचे फाटे फुटलेले असतात आणि यापैकी कोणत्या वाटेने संहती जाणार याचे भाकीत करता येत नाही. ही अनिश्चितता अंगभूतच असते. उलटपक्षी आकारजनन प्रक्रियेत अनिश्चिततेला फारसे स्थान नसते, त्यात तपशीलवार भाकीत करता येते. मग गर्भवाढीच्या प्रक्रियेत येणाऱ्या अनेक द्विभाजन बिंदूंशी संभवनीयता दडपून टाकली जाते ती कशामुळे? कोणती बले वा कारणे या प्रक्रियेला आधीच ठरवून दिल्यासारख्या मार्गाने वाटचाल करायला लावतात? सध्यातरी या कोड्याला उत्तर देणारे तपशीलवार स्पष्टीकरण उपलब्ध नाही. परंतु प्रिगोजिन यांनी जिला 'मदतपूर्वक द्विभाजन' म्हटले आहे ती कल्पना येथे महत्त्वाची ठरू शकेल. असे लक्षात आले आहे की काही अरेषीय प्रतिमानांत संहतीच्या द्विभाजन बिंदूवर वेगवेगळ्या मार्गांनी जाण्याच्या संभवनीयता बाह्य बलक्षेत्रांमुळे (उदा. गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र) बदलल्या जाऊ शकतात. ही बाह्य बलक्षेत्रे कितीही क्षीण असली तरी हा परिणाम घडून येतो. अशा वेळी एका वाटेने जाण्याची शक्यता दुसऱ्या वाटेपेक्षा कितीतरी पटीने अधिक होऊ शकते. वेगवेगळ्या द्विभाजन बिंदूपाशी आल्यावर एक विशिष्ट वाट धरून पुढे जाण्यासाठी त्या संहतीला बाह्य बलक्षेत्रे मदत करतात. मोठे स्वैर उष्मीय बदल झाले तर मात्र ती संहती अन्य एखाद्या मार्गाने जाते. आकारजनन जवळजवळ नेहमीच यशस्वीपणे घडून येते आणि क्वचित प्रसंगीच जन्मजात विकृती निर्माण होतात याचे स्पष्टीकरण अशा प्रकारे 'मदतपूर्वक द्विभाजनाच्या' संकल्पनेद्वारा होऊ शकते. थोडक्यात सांगायचे म्हणजे प्रिगोजिन यांची ऱ्हासीय संरचनांची संकल्पना आकृतिजनन प्रश्नाचा विचार

करण्यासाठी एक चांगली नैसर्गिक चौकट पुरवते. मात्र अगदी साध्या, खालच्या पातळी-वरील जीवांच्या बाबतीतही आकृतिजननप्रक्रियेचे तपशीलवार प्रतिमान उभारणे सध्यातरी फार दूरची गोष्ट आहे. एका बाजूस आकृतिजननाची रेण्वीय जीवशास्त्राने शोधून काढलेली सूक्ष्मपातळीवरील यंत्रणा आहे आणि दुसऱ्या बाजूस स्वयंसंघटन घडवून आणणारी असंतुलित ऊष्मागतिकीय प्रक्रिया म्हणून ओळखले जाणारे आकारजननाचे व्यापक पातळीवरील स्वरूप आहे. आकारजननाचे तपशीलवार प्रतिमान जेव्हा तयार केले जाईल तेव्हा ते या सूक्ष्म तसेच स्थूल पातळीवरील दोन्ही स्वरूपांचा मिलाफ घडवून आणेल.

आकृतिजननापेक्षाही अधिक मूलभूत कोडे आहे सजीवाच्या उत्पत्तीचे आणि येथे आणखी काही प्रश्न निर्माण होतात. पृथ्वीवर सजीवाची उत्पत्ती कशी झाली? निर्जीव स्थितीतून सजीव स्थितीत येण्याचा बदल पृथ्वीवर कसा घडला याबद्दल अनेक वेगवेगळे सिद्धान्त प्रचलित असून त्याबाबत एकवाक्यता झालेली नाही. आपल्या आतापर्यंतच्या समजुतीप्रमाणे जीवन म्हणजे न्यूक्लेइक ॲसिडस् व प्रोटीन्स यांचे परस्परावलंबित सहजीवन आहे : प्रोटीन्सची निर्मिती करण्यास जरूर असणारी माहिती न्यूक्लेइक ॲसिडस्‌मध्ये साठविलेली असते आणि त्या बदल्यात प्रोटीन्स न्यूक्लेअिक ॲसिडस्‌च्या पुनर्निर्मितीस सहाय्य करतात. अशी गुंतलेली ही जीवरेण्वीय संहती कशी उत्पन्न झाली?

पृथ्वीवर सजीवाची उत्पत्ती साधारण 300 कोटी वर्षांपूर्वी झाली. त्यावेळी पृथ्वीच्या वातावरणात हायड्रोजन, अमोनिया व मिथेन फार मोठ्या प्रमाणावर असण्याची शक्यता होती. या वातावरणात कडाडणाऱ्या विजांमुळे ह्या वायूपासून एक रासायनिक मिश्रण तयार झाले. यातील काही अमिनो ॲसिडस् व अन्य सेंद्रीय संयुगे यांनी सजीवाच्या निर्मितीत मोठी भूमिका बजावली. इथपर्यंतचा हा सिद्धान्त प्रयोगशाळेत पृथ्वीच्या भूतकाळसदृश परिस्थिती निर्माण करून तपासला गेला आहे. त्यानंतरचा प्रश्न आहे की हे मूलभूत घटक जीवरेणूंच्या लांब साखळ्यांत कसे गोवले गेले आणि त्यानंतर प्रोटीन्स व न्यूक्लेइक ॲसिडस् यांच्या सहकारी संहतीत कसे संघटित झाले? आधी न्यूक्लेअिक ॲसिडस् व मग प्रोटीन्स की याच्याविरुद्ध याबाबत वेगवेगळ्या प्रतिमानांत वेगवेगळ्या भूमिका घेतल्या गेल्या आहेत. यापेक्षा अगदीच भिन्न प्रकारे सजीवाची उत्पत्ती झाली असे मांडणारेही काही सिद्धान्त आहेत.

सिद्धान्त कोणताही असला तरी मुख्य, कळीचा प्रश्न आहे की पृथ्वीवर सजीवनिर्मिती करण्यासाठी ज्या घटनाक्रमाची आवश्यकता होती त्याची एकूण संभाव्यता किती? प्रस्थापित दृष्टीकोनानुसार या घटना स्वैरपणे घडलेल्या होत्या. रेणूंचे काही गट नेमके अशा विशिष्ट परिस्थितीत एकमेकांवर आदळले की त्यातून रेणुसाखळ्या तयार झाल्या आणि त्यांच्या परस्पर आदळण्यातून अधिक मोठ्या व लांब साखळ्या तयार झाल्या, वगैरे. प्रारंभावस्था कशी होती हे निश्चित सांगणे शक्यच नसल्याने कोणत्याही एका सिद्धान्तानुसार सजीवनिर्मिती होण्याची एकूण संभाव्यता किती याचा नक्की अंदाज बांधणेही शक्य नाही. परंतु याबाबत ढोबळमानाने तर्क करता येतो. पृथ्वीच्या जन्मानंतर सजीवाची निर्मिती होण्यास 100 कोटी वर्षांचा दीर्घ काळ मिळाला असे जरी आपण मानले तरी या एकूण

घटनाक्रमाला लागणारी संभाव्यता इतकी कल्पनातीत कमी येते की या स्वैर प्रतिमानानुसार सजीवनिर्मिती म्हणजे एकमेवाद्वितीय घटना असली पाहिजे.

एक असंतुलित प्रक्रिया म्हणून जर आपण सजीवाच्या उत्पत्तीकडे पाहिले तर मात्र वरील अनुमानात खूपच बदल करावा लागेल. स्वैरपणे होणारे बदल ही गोष्ट ऊष्मागतिकीय संतुलनातील संहतींना लागू पडते. तीनशे कोटी वर्षांपूर्वीचे पृथ्वीवरील आदिम रासायनिक मिश्रण संतुलनस्थितीपासून फारच दूर असणार - रासायनिक ऱ्हासीय संरचना स्वयंस्फूर्तपणे निर्माण होण्यास ही वेळ फारच योग्य. ही स्थिती स्वैर हालचालींतून निर्माण होणाऱ्या सर्जनशीलतेची नाही. उलट या स्थितीत स्वयंसंघटनाची प्रवृत्ती उफाळून येते. परिस्थिती जशी संतुलनापासून अधिकाधिक दूर जाते तसतसे नवनवे, अधिकाधिक वैशिष्ट्यपूर्ण स्वयंसंघटित आकृतिबंध स्वयंस्फूर्तपणे उमलून येतात. अर्थात यातील सर्वच आकृतिबंध काही स्वत:च्या प्रतिकृती जन्माला घालणाऱ्या जीवरेणूंत रूपांतरित होत नाहीत; पण काही होतात. आणि हे घडण्याची संभाव्यता काही शक्याशक्यतेच्या आंधळ्या नियमांनी बद्ध नसते. अस्थैर्याच्या बिंदूपाशी स्वैर शक्यतेची भूमिका महत्त्वाची ठरते, परंतु येथेही काही आकृतिबंध इतरांपेक्षा अधिक प्रमाणात निवडले जातात. सजीवाची उत्पत्ती होण्यासाठी द्विभाजनांची क्रमवारी कशा प्रकारे झाली पाहिजे हे तपशीलवारपणे सांगणारे प्रतिमान मिळाले तरच जीवनाच्या उद्‌भवाची शक्यता मोजता येईल. अजूनपर्यंत तरी तसे प्रतिमान मिळालेले नाही. तरीही प्रिगोजिन यांच्या दृष्टिकोनातून आपल्या लक्षात येते की सजीवाची निर्मिती ही काही आत्यंतिक अशक्यतेच्या कोटीतील गोष्ट नाही - अशाच प्रकारच्या असमतोलाच्या परिस्थितीत जीवसृष्टी अन्यत्रही उद्‌भवू शकते! (आकृती 18.1)



आकृती 18.1 : प्रिगोजिनप्रणीत दृष्टिकोनातून सजीवाची उत्पत्ती बहुधा असंतुलनावस्थेतील आदिम रासायनिक मिश्रणातील द्विभाजनांच्या विशिष्ट अनुक्रमातून घडून आली असावी.

या संकल्पना आणखी एका मूलभूत प्रश्नाबाबतही महत्त्वपूर्ण ठरणाऱ्या आहेत : प्राणिजातींच्या उत्क्रांतीसंदर्भात. आपल्याला माहीतच आहे की डार्विनच्या क्रांतिकारक सिद्धान्ताने या विषयाची धार्मिक व गूढवादी विचारांच्या पकडीतून सुटका केली आणि हा विषय विज्ञानाच्या दालनात आणला. सोप्या रूपात सांगायचे तर डार्विनच्या सिद्धान्तात तीन तत्त्वे अंतर्भूत आहेत : कोणत्याही एका जातीच्या सदस्यांच्या वैशिष्ट्यपूर्ण लक्षणांमध्ये एकसारखेपणा नसून त्यात विविधता असते; एका पिढीतील सदस्यांची वैशिष्ट्यपूर्ण लक्षणे बहुतांशी आधीच्या पिढीसारखीच असतात, परंतु संपूर्ण सारखी नसतात; आणि सजीव जितके जास्त फिट (म्हणजे पर्यावरणाशी त्यांची वैशिष्ट्ये अधिक जुळून येणारी) तितके ते जास्त तग धरतात व त्यांची प्रजोत्पत्तीही जास्त होते. शेवटचे तत्त्व (नैसर्गिक निवड) तसे उघडच आहे. परंतु पहिल्या दोन अनुभवसिद्ध तत्त्वांबरोबर वापरल्यावर उत्क्रांतीची *वस्तुस्थिती* समजून घेण्यासाठी आवश्यक अशी एक मजबूत चौकट, एक बळकट पाया यातून आपल्याला उपलब्ध होतो :- बदलणाऱ्या पर्यावरणाप्रमाणे प्राणिजातींत कसे बदल घडून येतात हे आपण बऱ्यापैकी व्यवस्थितपणे समजून घेऊ शकतो. डार्विनच्या सिद्धान्तातील तत्त्वांशी संलग्न अशा वा ती तत्त्वे विशद करणाऱ्या सूक्ष्म पातळीवरील घडामोडी रेण्वीय जीवशास्त्राने उकलून दाखविल्या आहेत आणि यामुळे डार्विनच्या सिद्धान्तास अधिक बळकटी प्राप्त झाली आहे. नक्कल करण्यातील चुका, पर्यावरणाचा प्रभाव वगैरे कारणांमुळे जनुकांमध्ये *स्वैर* बदल घडून येतात व त्यामुळे दर पिढीतील वैशिष्ट्यपूर्ण लक्षणांत बदल होतो. आणि यातील जे बदल पर्यावरणाशी जास्त मिळतेजुळते असतात त्यांचे वर्चस्व साहजिकच वाढते व ते बदल त्या जीवजातीची उत्क्रांती धीमेपणाने पुढे रेटतात.

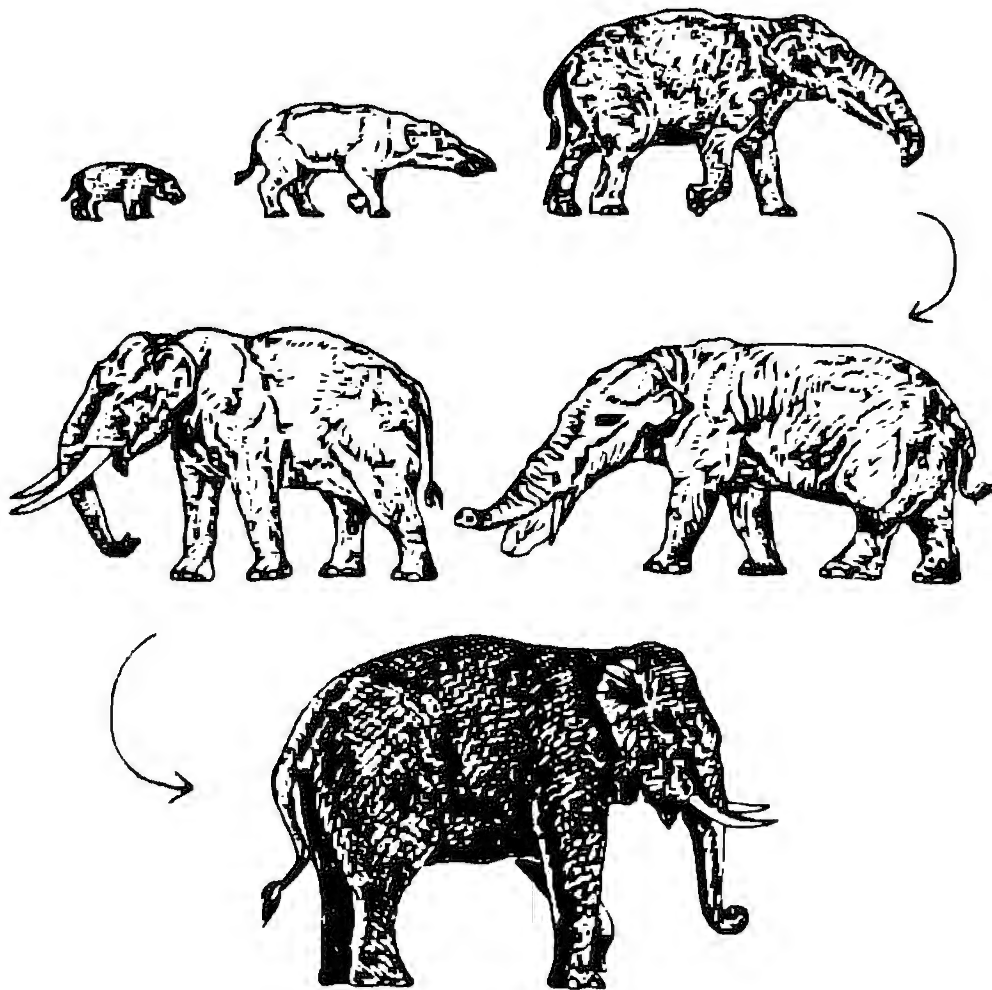
या नव-डार्विनवादी सिद्धान्ताने उत्क्रांतीची जी सर्वसाधारण प्रक्रिया मांडली आहे ती बऱ्यापैकी मान्य होणारी असली तरी यात संभवनीयतेस वा शक्याशक्यतेस जे महत्त्वाचे स्थान दिले गेले आहे ते अनेक कारणांमुळे संशयास्पद वाटते. जर बदल पूर्णपणे स्वैर असतील तर यशस्वीपणे जुळून येणाऱ्या बदलांपेक्षा कितीतरी अधिक पट न जुळून येणारे बदल असले पाहिजेत. याशिवाय, मिळते-जुळतेपणामुळे होणारा निवडीतील फायदा केवळ एका बदलामुळे होण्यापेक्षा योग्य त्या क्रमाने घडून आलेल्या व परस्परांशी संबंधित अशा बदलांच्या संचामुळे होण्याचीच शक्यता आहे. अशा बदलसंचाचा अर्धाच भाग प्रत्यक्षात घडून आला तर निवडीबाबतही अर्धा फायदा मिळेलच अशी काही शक्यता नसते. जनुकीय बदल उत्क्रांतिक्रमात निवडले जायचे असतील तर ते अखंड बदलसंचातच होणे जरूर आहे. प्रत्येक बदल जर स्वैर असेल तर या प्रकाराची शक्यता आत्यंतिक कमी आहे. परंतु इतक्या शंकाकुशंका असूनही नव-डार्विनवाद स्वीकारला जातो, कारण या शक्यतांची किंमत धडपणे काढणे कोणालाच जमलेले नाही. त्यामुळे या प्रश्नावर पांघरूण घालून तो बाजूला सारण्याचाच प्रयत्न केला जातो. वैज्ञानिक सोयीस्करपणे असा विचार करतात की निवडले जाणारे बदल भले कितीही दुर्मिळ असोत, कोटी कोटी वर्षांचा प्रचंड कालावधी या दुर्मिळतेची उणीव भरून काढतो आणि उत्क्रांती धीम्या गतीने, पण निश्चितपणे पुढे जातच राहते.

मात्र उत्क्रांतीचे एक वैशिष्ट्य असे आहे की जे नव-डार्विनवादात नैसर्गिकरीत्या बसूच शकत नाही. पंधराव्या प्रकरणामध्ये वर्णन केलेला सर्जनक्षम कालबाण उत्क्रांतिमध्ये अंतर्भूत असतो असे आढळते. साधे जीव कालांतराने वाढत्या गुंतागुंतीच्या जीवजातीत उत्क्रांत होतात. उत्क्रांतीक्रमात अत्यंत व्यामिश्र आकृतिबंध व संरचना असलेल्या जीवांची उत्पत्ती झाली आहे. प्रचंड प्रजननक्षमता असणाऱ्या साध्या जीवांऐवजी अशा गुंतागुंतीच्या जीवांची निर्मिती का व्हावी या प्रश्नाचे उत्तर नव-डार्विनवाद देऊच शकत नाही.

उत्क्रांतीतील सर्जनक्षम कालबाणाचे पूर्ण विश्लेषण जरी प्रिगोजिनच्या रूपावलीद्वारे होत नसले तरी त्यासंबंधी काही मार्गदर्शनपर सूत्रे त्यातून निश्चित हाती लागतात. बदलत्या पर्यावरणस्थितीचा अर्थ असा होतो की प्राणिजाती असंतुलित अवस्थेत आहेत; पर्यावरणातील बदल जितका जास्त तितके असंतुलनही अधिक. क्रांतिक उंबरठ्यावर जाती एकाएकी स्वयंसंघटन करणाऱ्या नवीन संरचनांत उत्क्रांत होतात. प्रत्येक द्विभाजनानंतर या संरचना अधिकाधिक व्यामिश्र व वाढत्या अंतर्गत गुंतागुंतीच्या होत जातात. स्वयंसंघटनाची ही प्रवृत्ती, हा कलच उत्क्रांतीत आढळणाऱ्या वाढत्या व्यामिश्रतेला जबाबदार आहे. याचा अर्थ असा नव्हे की जनुकीय बदल व नैसर्गिक निवड ही दोन्ही तत्त्वे चुकीची आहेत. येथे एवढेच अभिप्रेत आहे की जनुकीय बदल हे स्वैर नसून असंतुलित अवस्थेत स्वयंसंघटन घडवून आणण्याच्या संहतीच्या व्यापक प्रवृत्तीचाच भाग आहेत आणि नैसर्गिक निवडीचे तत्त्व एकेका जनुक बदलाऐवजी या स्वयंसंघटित स्थितींवर कार्यान्वित होते. हे चित्र असे सुचवते की उत्क्रांती डार्विननी सांगितलेल्या यंत्रणेनुरूप संथ सातत्याने होत नाही, तर अचानक, पृथकपणे होते. स्टीफन जे. गोल्ड या मान्यवर जीवशास्त्रज्ञाने मांडलेली 'टप्प्याटप्प्याचे संतुलन' ही कल्पना प्रिगोजिन यांच्या चित्रणाशी जुळणारी आहे. प्रिगोजिन यांच्या प्रतिमानात द्विभाजन बिंदूवर एकदम बदल होतो, तर दोन विभाजन बिंदूमध्ये स्थिर परिस्थिती असते - उत्क्रांतीप्रक्रिया संथ असते. (आकृती 18.2)

खूप असंतुलित खुल्या संहतीमधील स्वयंसंघटनाची प्रिगोजिनप्रणीत रूपावली अशा प्रकारे सजीव सृष्टीचा उगम, वाढ आणि उत्क्रांती यावर नवा प्रकाश टाकते. रेण्वीय जीवशास्त्रात सजीवाच्या जनुकीय व जीवरासायनिक क्रियाप्रक्रियांच्या तपशिलासंबंधी अनेक महत्त्वाचे शोध लागले आहेत. प्रिगोजिन यांचा दृष्टिकोन याच्या विरोधात नसून त्याला पूरक आहे, हे आपण समजून घेतले पाहिजे. तसेच हा दृष्टिकोन काहीसा साकल्यवादी (holistic) असला तरी तो पूर्णांशाने वैज्ञानिक दृष्टीकोन असून त्यात कसलाही हेतू वा पूर्वआराखडा अशा कल्पनांना थारा नाही. या दृष्टिकोनानुसार स्वयंसंघटनाची वृत्ती हा असंतुलित स्थितीतील अरेषीय खुल्या संहतींचा वस्तुनिष्ठ गुणधर्म आहे - त्यात कोणत्याही प्रकारे अंतिम उद्दिष्टवादी (teleological) विचारांची छटा नाही.

उत्क्रांतीच्या शिडीवर वरती असणाऱ्या माणसासारख्या सजीवांचा स्वभाव अंतिम उद्दिष्ट ठेवणारा असतो. हे सजीव जाणीवपूर्वक एखादा उद्देश ठेवून त्याबरहुकूम कृती करू शकतात वा पूर्ण स्वेच्छेने वागू शकतात. ते बहुतांशी 'अंतिम कार्यकारणभावाने' (final causality) बांधलेले असतात - म्हणजे संहतीची वागणूक प्रारंभावस्थेवर नव्हे तर अंतिम



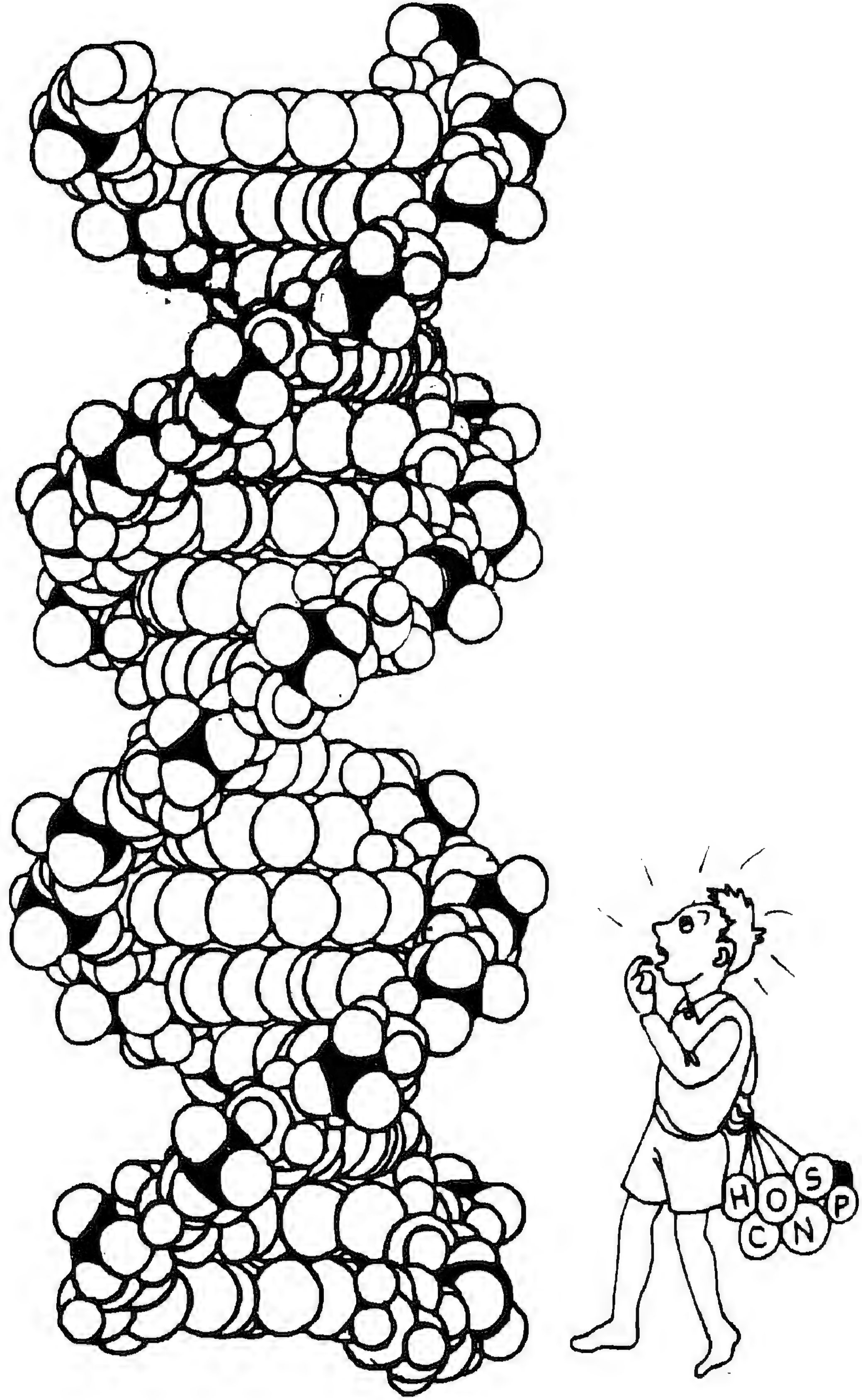
आकृती 18.2 : प्रिगोजिनप्रणीत रूपावलीनुसार असंतुलित अवस्थेच्या क्रांतिक उंबरठ्यांवर प्राणिजाती एकाएकी स्वयंसंघटन करणारे नवीन आकृतिबंध स्वीकारतात आणि अशा प्रकारे अधिक व्यामिश्र आकारांत उत्क्रांत होतात.

ध्येयावर अवलंबून असते. अंतिम कार्यकारणभावाला सध्याच्या आपल्या विज्ञानात काही स्थान नाही. असंतुलित ऊष्मागतिकी विज्ञानावर आधारित असलेली प्रिगोजिन यांची रूपावली वरच्या दर्जाच्या सजीवांच्या या अत्यंत ठळक वैशिष्ट्याच्या प्रश्नाला हात घालण्यास अपुरी पडताना दिसते.

अधिक तपशीलवार विवेचनासाठी पाहा : संदर्भ 7, 14 आणि 15.

भाग पाचवा

व्यामिश्रता



एकोणीस

संक्षेपणवाद आणि साकल्यवाद

जीवनाचे न सुटलेले रहस्य आपल्याला विज्ञानातील सर्वाधिक कठीण प्रश्नाला नेऊन भिडवते : व्यामिश्रतेचे विश्लेषण संक्षेपणवादी (reductionist) चौकटीतच करणे जरूर आहे काय? निसर्गातील व्यामिश्रता व गुंतागुंत यांच्याकडे बघण्याचे इतर काही वैज्ञानिक मार्ग आहेत का?

संक्षेपणवादाचा अर्थ संपूर्ण गोष्ट वा घटना छोट्या छोट्या भागांत विभागून त्यांची जडणघडण व परस्परक्रिया यांच्याद्वारे मूळ गोष्ट समजून घेणे. या दृष्टिकोनानुसार संहतीचे गुणधर्म अंतिमत: तिच्या सर्वात मूलभूत घटकांद्वारेच निश्चित केले जातात. ती संहती किती कमीअधिक गुंतागुंतीची आहे हे येथे महत्त्वाचे नसते. एक रेणू वा एक तारा, एक जीवाणू वा एक माणूस असो, प्रत्येकाचे गुणधर्म त्याचे त्याचे मूलभूत घटकच ठरवून देतात. हे सर्वात मूलभूत घटक कोणते ते विज्ञानातील प्रगतीच्या टप्प्यावर वा आपल्याला किती खोलात व तपशिलात शिरायचे आहे यावर अवलंबून असते. उदाहरणार्थ आपण अणू-रेणूंच्या पातळीवर जाऊन थांबू शकतो. वा त्याहून खाली मूलकणांच्या म्हणजे प्रोटॉन, न्यूट्रॉन, इलेक्ट्रॉन इत्यादींच्या पातळीवर जाऊ शकतो. वा त्याही खाली क्वार्क, सुपरस्ट्रिंग वगैरे वगैरेंच्या पातळीवर. या दृष्टिकोनात महत्त्वाची गोष्ट म्हणजे हे मूलघटक परस्परांशी व पर्यावरणाशी कशा प्रकारे क्रिया-प्रतिक्रिया करतात हे समजून घेणे. हे मूलघटक कणरूपी असले पाहिजेत असेही काही बंधन नाही; ते एखादे मूलभूत प्रभावक्षेत्रही असू शकते - सर्वव्यापी, दूरवर पसरलेले. संक्षेपणवादी एखाद्या जीवशास्त्रीय संरचनेचे गुणधर्म प्रोटीन्स, न्यूक्लेइक ॲसिडस् इत्यादींच्या मूलभूत जीवरसायनशास्त्राद्वारे समजून घेण्याचा प्रयत्न करतो. ही प्रथिने व न्यूक्लेइक ॲसिडस् कार्बन, ऑक्सिजन, नायट्रोजन, हायड्रोजन इत्यादींच्या अणूंनी बनलेली असतात, आणि ह्या अणूंकडे पुन्हा इलेक्ट्रॉन्स, प्रोटॉन्स व न्यूट्रॉन्स या मूलकणांच्या संरचना म्हणून बघितले जाते. प्रत्यक्ष व्यवहारात संक्षेपणवादी नेहमीच काही या अंतिम मूलघटकांच्या पातळीवर जात नाही. परंतु त्याचा ठाम विश्वास असतो की 'वरच्या पातळी'तील कोणताही गुणधर्म हा सैद्धान्तिकदृष्ट्या 'खालच्या पातळी'वरील घटकांचे गुणधर्म व आंतरक्रिया यांच्यावरच अवलंबित असला पाहिजे.

संक्षेपणवाद आधुनिक वैज्ञानिक व्यवहाराच्या केंद्रस्थानी आहे. बहुसंख्य वैज्ञानिकांच्या दृष्टीने एखाद्या घटनेचे वा विषयाचे 'खरे' ज्ञान होणे म्हणजे त्यातील मूलभूत घटकांची समज घडून येणे. निसर्गाबद्दलच्या संक्षेपणवादी दृष्टिकोनात घडून आलेली प्रगती म्हणजेच मूलभूत विज्ञानात घडून आलेली प्रगती असे समीकरणही बहुधा मांडले व मानले जाते. हा दृष्टिकोन इतका प्रभावी असण्याची कारणे शोधण्यासाठी फार प्रयत्नांची गरज नाही. जीवनातील इतर क्षेत्रांप्रमाणेच विज्ञानातही यशाकडेच अधिक यश चालून येते. भौतिकीत अणू, रेणू व त्यांच्या एकत्रीकरणाने निर्माण होणारे घनरूप, वायुरूप व द्रवरूप पदार्थ, अशांसारख्या मध्यम व्यामिश्रता असणाऱ्या संहतींशी आपली गाठ पडते; आणि येथे संक्षेपणवादी दृष्टिकोनाला एवढे भरगच्च यश प्राप्त झाले आहे की इतर एखाद्या साकल्यवादी दृष्टिकोनाला त्याची बरोबरी करणे अशक्यच आहे. जीवशास्त्रात आढळणाऱ्या आत्यंतिक व्यामिश्र संहतींबाबत संक्षेपणवादाला मिळालेले यश फारच मर्यादित आहे. परंतु येथे कोणा अन्य साकल्यवादी दृष्टिकोनालाही फारसे यश संपादता आलेले नाही. अगदी अलीकडेपर्यंत संक्षेपणवादाला एक तत्त्वज्ञान म्हणून विरोध करणाऱ्यांत भौतिकी वैज्ञानिकांपेक्षा जीववैज्ञानिकांचे प्रमाण जास्त होते. परंतु रेण्वीय जीवशास्त्राने केलेल्या नेत्रदीपक प्रगतीमुळे बहुतांशी आधुनिक जीववैज्ञानिक आता संक्षेपणवाद स्वीकारू लागले आहेत. आश्चर्याची गोष्ट म्हणजे ज्या भौतिकशास्त्राने संक्षेपणवाद बळकट करण्यास प्रामुख्याने हातभार लावला त्याच्याच काही मूलभूत क्षेत्रांत संक्षेपणवादाला जबरदस्त गंभीर आव्हान निर्माण झाले आहे.

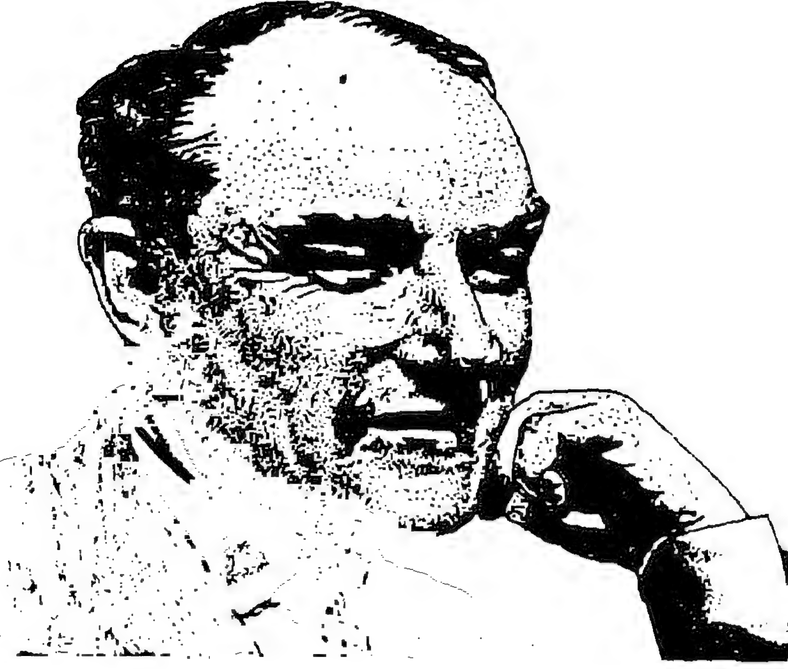
वरच्या पातळीवर प्रथम मांडली गेलेली एखादी संकल्पना जेव्हा संक्षेपणाने खालच्या पातळीवरील घटकांद्वारा व्यक्त केली जाते तेव्हा ती अधिक स्पष्ट होते, व तिचा अर्थ अधिक नेमकेपणे व्यक्त होतो हे विज्ञानातील अनेक उदाहरणांवरून कळून येते. रासायनिक क्रियांच्या अभ्यासावरून वैज्ञानिकांनी मूलद्रव्यांचे एक महत्त्वाचे वैशिष्ट्य बराच काळ नोंदवून ठेवले होते - व्हॅलन्सी. रेणू तयार होताना निरनिराळ्या मूलद्रव्यांचे अणू ज्या सापेक्ष प्रमाणात एकत्र येतात ते प्रमाण व्हॅलन्सीने दर्शविले जाते. उदा. ऑक्सिजन अणूची व्हॅलन्सी सोडियमच्या दुप्पट आहे. त्यामुळेच सोडियम ऑक्साइडचा ($Na_2 0$) एक रेणू तयार होण्यासाठी ऑक्सिजनच्या एका अणूशी संयोग करण्यास सोडियमच्या दोन अणूंची गरज पडते. मात्र व्हॅलन्सीच्या या संकल्पनेचा अधिक खोलातला अर्थ, तसेच तिच्या मर्यादाही, समजून आल्या त्या अणूची इलेक्ट्रॉनीय संरचना शोधून काढली गेल्यावर. येथे लक्षात आले की व्हॅलन्सीचा संबंध अणूच्या सर्वात बाहेरील आवरणातील इलेक्ट्रॉन्सच्या संख्येशी आहे. अशा प्रकारे एका व्यामिश्र संहतीचा (अणूचा) वरच्या पातळीवरील गुणधर्म खालच्या पातळीवरील घटकांच्या (इलेक्ट्रॉन्स) द्वारे विशद केला गेला.

संक्षेपणवादाच्या यशाचे आणखी एक खास अभिजात उदाहरण म्हणजे ऊष्मागतिकीतील एन्ट्रॉपीची संकल्पना. चौदाव्या प्रकरणामध्ये आपण याकडे एक नजर टाकलेलीच आहे. एकोणिसाव्या शतकात उष्णता अभियंत्रांचे सैद्धान्तिक विश्लेषण करत असताना वैज्ञानिक या संकल्पनेपाशी येऊन पोहोचले. दाब व तापमान यांच्याप्रमाणेच एन्ट्रॉपी हा संहतीचा एक चल होता, आणि त्याचा वापर केल्याने ऊष्मागतिकीचा दुसरा

नियम फारच सुंदरपणे व्यक्त होत होता : अलग संहतीची एन्ट्रॉपी कधीच कमी होत नाही! एन्ट्रॉपीची संकल्पना मोठ्या प्रमाणावर यशस्वीपणे वापरली गेली खरी, परंतु ती बराच काळ खूपच अगम्य व अनाकलनीय राहिली. अखेर लुडविग बोल्ट्झमान यांनी तिचा संहतीच्या खालच्या पातळीवरील घटकांशी (रेणूंशी) असलेला संबंध दाखवून दिला तेव्हा कोठे या संकल्पनेतील धूसरता कमी झाली. खालच्या (सूक्ष्म) पातळीवरील रेणूंच्या अनेकविध भिन्न रचना वरच्या (स्थूल) पातळीवर संहतीची एकच समान स्थिती दर्शवितात. एकच स्थूलस्थिती दर्शविणाऱ्या खालच्या पातळीवरील रेण्वीय रचनांच्या संख्येचा लॉगरिदम एन्ट्रॉपीच्या प्रमाणात असतो असे बोल्ट्झमान यांनी मांडले. येथे संक्षेपणवादी तत्त्वज्ञानाला मोठा विजय प्राप्त झाला. ही गोष्ट या आधी 'वायूंच्या गतिसिद्धान्ता' बाबतही घडली होती : दाब व तापमान हे स्थूल पातळीवरील गुणधर्म रेणूंच्या हालचालींशी निगडित असल्याचे सिद्ध झाले होते. यातून ऊष्मागतिकीशास्त्राच्या एका आमूलाग्र नवीन संक्षेपणवादी आवृत्तीचा जन्म झाला : संख्याशास्त्रीय गतीस्थितिशास्त्र हा तो विषय.

परंतु संक्षेपणवादाचे यश केवळ भौतिकीशास्त्रांपुरतेच मर्यादित नाही. डार्विनच्या उत्क्रांतिवादाच्या सिद्धान्तातील एक महत्त्वाचा घटक आहे प्राणिजातीच्या आनुवंशिक वैशिष्ट्यपूर्ण लक्षणांमध्ये दर पिढीत होत जाणाऱ्या स्वैर बदलांची कल्पना. हे स्थूल बदल जेव्हा सूक्ष्म पातळीवरील जनुकांत होणाऱ्या स्वैर बदलांशी जोडले गेले तेव्हा या संक्षेपणवादी स्पष्टीकरणामुळे ती मूळ कल्पना अधिक स्पष्ट व सुगम्य झाली. जनुकातील बदल हे पर्यावरणाचा प्रभाव, नक्कल करण्यातील चुका इत्यादी कारणांमुळे घडून येतात. आनुवंशिकतेचे वाहन असणारे जनुक ही आरंभी मेंडेल यांच्या अनुवंशशास्त्रातील वरच्या पातळीवरील एक संकल्पना होती. रेण्वीय जीवशास्त्रातील प्रगतीमुळे वरच्या पातळीवरील ही संकल्पना खालच्या पातळीवरील जीवरासायनिक रेणूंची (डी.एन.ए.) रचना व कार्यपद्धती याद्वारे अधिक सुस्पष्टपणे विशद केली गेली. संक्षेपणामुळे जनुकाची संकल्पना आता रेणुरचनेच्या पातळीवर आली आहे. अशा प्रकारे संक्षेपणाने डार्विनवादाला नव-डार्विनवादात रूपांतरित केले आहे, व त्यातून उत्क्रांतीच्या वस्तुस्थितीचे अधिक तपशीलवार व अधिक निश्चित स्वरूप प्रकट झाले आहे. (आकृती 19.1)

मात्र इतके यश पदरी असूनही गेल्या काही काळात संक्षेपणवादावर अनेक बाजूंनी वाढते हल्ले सुरू झाले आहेत. याचे कारण अंशत: तरी सामाजिक-सांस्कृतिक आहे. पाश्चिमात्य देशांत तंत्रज्ञानाची बेसुमार वाढ होऊन तदनुषंगिक वाईट परिणाम दिसू लागले आहेत. यामुळे काही लोक तंत्रज्ञानवाढीच्या मुळाशी असणाऱ्या विज्ञानाच्याच विरोधात गेले आहेत. आणि सर्वसाधारणपणे विज्ञान म्हणजे संक्षेपणवादाचेच दुसरे नाव अशी भावना असल्याने संक्षेपणवादही संशयाच्या भोवऱ्यात अडकला आहे; भल्यापेक्षा वाईट अधिक करणारे तत्त्वज्ञान म्हणून त्याकडे पाहिले जात आहे. शिवाय वैज्ञानिकांच्या जगातही संक्षेपणवादावर टीका होऊ लागली आहे; आणि आपल्या संशोधनकार्यात संक्षेपणवाद आत्यंतिक हिरीरिने वापरणारे काही वैज्ञानिकही या टीकेत सहभागी आहेत.



फ्रान्सिस क्रिक



जेम्स वॅटसन



लड्विग बॉल्टझ्मन

आकृती 19.1 : संक्षेपणवादी विज्ञानक्षेत्रातील काही महत्त्वाच्या व्यक्ती.

या टीकाकारांचे वर्गीकरण करणे आवश्यक आहे. काहींची टीका फारच उथळ, वरवरची असते, तर काहींच्या टीकेची गंभीरपणे दखल घेणे अत्यावश्यक असते. कित्येकदा संक्षेपणवादाची एखादी भाबडी वा मर्यादित व्याख्या केली जाते आणि मग त्यावर झोड उठविली जाते. यातील एक, नेहमी घडणारा प्रकार म्हणजे संक्षेपणवाद पुढील शब्दांत व्यक्त करायचा : "पूर्ण वस्तू वा चीज तिच्या तुकड्यांची *बेरीज* असते"; हे वाक्य शब्दश: घ्यायचे आणि मग त्याच्या चिंध्या उडवायच्या. संक्षेपणवाद म्हणजे वरील वाक्यात व्यक्त केलेला अर्थ नव्हे हे समजण्यासाठी विज्ञानात फार तज्ज्ञ असण्याची गरज नाही. सोडियम क्लोराइड म्हणजे मिठाच्या रेणूचे गुणधर्म काही सोडियम व क्लोरिन अणूंच्या वैयक्तिक गुणधर्मांच्या बेरजेतून उद्भवत नाहीत. परंतु पुंजयांत्रिकीच्या वापराने मिठाचे गुणधर्म घटक अणूंशी निगडित असल्याचे सिद्ध करता येते. यातील विश्लेषण क्षुल्लक नसून बऱ्यापैकी कठीण असते. संक्षेपणवादाचे ठाम सांगणे एवढेच आहे की वरच्या पातळीवरील गुणधर्मांचे नीट स्पष्टीकरण होण्यासाठी खालच्या पातळीवरील घटकांची विश्लेषणासाठी आवश्यकता आहे. वरच्या पातळीवरील एखादा गुणधर्म खालच्या पातळीवरील घटकांच्या गुणधर्मांद्वारे साध्यासरळ संबंधातून व्यक्त करता आला पाहिजे असे काही संक्षेपणवादात गृहीत धरलेले नाही. अतिसंवाहकता व लेसर यांसारखे घटकांची सहकारी वागणूक अंतर्भूत असणारे विषयही संक्षेपणवादाविरोधी साक्ष देत नाहीत. कारण त्यांचे स्पष्टीकरणही संहतीतील घटकांच्या परस्परक्रियांद्वारे देता येते. असे म्हणता येईल की संक्षेपणवादातील स्पष्टीकरण *परस्परांवर* क्रिया करणाऱ्या घटकांद्वारे होते, वरील वाक्यात अध्याहृत असल्याप्रमाणे *स्वतंत्र अलग* घटकांद्वारे नाही.

चूक होण्याची आणखी एक शक्यता म्हणजे संक्षेपणवाद आणि निश्चिततावाद एकच मानणे. रूढ अभिजात विज्ञानातील यांत्रिक रूपावलीची निर्मिती निश्चिततावादी तत्त्वज्ञान आणि संक्षेपणवाद एकत्र आल्याने झाली हे खरेच आहे. परंतु संकल्पनात्मकदृष्ट्या संक्षेपणवाद आणि निश्चिततावाद परस्परांपासून भिन्न आहेत. पुंजसिद्धान्ताने रूढ निश्चिततावाद संपवून टाकला, परंतु त्यातही सूक्ष्मपातळीवरील हालचालींचे स्पष्टीकरण संक्षेपणवादी पद्धतीनेच दिले जाते. आधुनिक पुंज-क्षेत्रीय सिद्धान्तात विविध आंतरक्रिया तसेच मूलकण यांचे सर्वसमावेशक एकत्रीकरण घडवून आणण्याचा शोध जारी आहे. हा संक्षेपणवादाचा सर्वोत्कृष्ट (वा सर्वात वाईट) आविष्कारच म्हटला पाहिजे! याप्रकारे कोलाहल व स्वयंसंघटन यांनी अगदी स्थूलपातळीवरदेखील निश्चिततावादाचा फोलपणा उघड केला आहे. परंतु त्यांनी विज्ञानाच्या संक्षेपणवादी तत्त्वज्ञानाला आव्हान दिले आहे असे अजूनपर्यंत तरी उघडपणे जाणवत नाही.

व्यामिश्र संहतींत, विशेषत: जीवशास्त्रीय संहतींत, एका पातळीवरून दुसऱ्या पातळीवर जाताना अनेक गुणात्मकदृष्ट्या नवी अशी लक्षणे व वैशिष्ट्ये आढळून येतात. या नव्या लक्षणांना व वैशिष्ट्यांना संक्षेपणवादात काही महत्त्व दिले जात नाही अशी टीका फार व्यापक प्रमाणावर होते. ह्या नव्या पातळ्यांना 'उगवणाऱ्या' पातळ्या असे संबोधले जाते. त्या स्वायत्तपणे वागताना आढळतात आणि त्यांचे खालच्या पातळीवर संक्षेपण करणे फारसे

शक्य वाटत नाही. उदाहरणार्थ माणसाच्या भावनिक व्यवहारातील आकृतिबंध नक्कीच खालच्या पातळीवर घडणाऱ्या जीवरासायनिक प्रक्रियांशी संबंधित असतात, आणि या जीवरासायनिक प्रक्रिया त्याहून खालच्या पातळीवरील अणू-रेणूंच्या हालचालींशी निगडित असतात. परंतु येथे प्रत्येक पातळी स्वायत्त असल्याचे जाणवते, कारण प्रत्येक पातळीचे स्वत:चे नियम व अन्य संबंध आढळतात. आणि हे व्यवहार अखेरीस अणू-रेणूंच्या हालचालींच्या स्वरूपात पूर्णपणे स्पष्ट करून सांगता येतील असा विचार करणेही फार अविश्वसनीय वाटते. वेगळ्या शब्दांत सांगायचे तर या टीकेनुसार खूप व्यामिश्र संहतींतील उगवत्या गुणधर्मांचे स्पष्टीकरण देण्याबाबत संक्षेपणवाद हे अगदीच पोकळ तत्त्वज्ञान ठरते.

ही टीका गंभीर स्वरूपाची आहे, परंतु तरीही यात संक्षेपणवाद नीट रीतीने मांडलेला नाही. व्यामिश्र संहतीच्या वेगवेगळ्यॆा पातळ्यांवर आढळणाऱ्या नियमांचे अस्तित्व, महत्त्व आणि उपयुक्तता एखादा उथळ संक्षेपणवादी नाकारेल; परंतु परिपक्व, समजूतदार संक्षेपणवादी तसे करत नाही. तसे पाहता वेगवेगळ्या पातळीवरील भिन्नभिन्न नियम आणि संकल्पना यांचा विज्ञानक्षेत्रात सुकाळच आहे. याची बरीच उदाहरणे आधी आलेलीच आहेत. संक्षेपणवादी आग्रहाने एवढेच प्रतिपादन करतो की वरच्या पातळीवरील नियम हे फक्त दृश्यघटना पातळीवरचे स्थूलमानीय नियम असून सर्वात खालच्या पातळीवरील मूलभूत नियमांची प्रतिष्ठा व महत्त्व त्यांना कधीच प्राप्त होऊ शकणार नाही. संक्षेपणवादी मान्य करतो की भिन्नभिन्न पातळ्यांवरील उगवत्या गुणधर्मांचे त्या त्या पातळीवरील नियम मूलभूत नियमांद्वारे विशद करायचे म्हटले तर ते काम अतिशय अवघड आहे. यातील तांत्रिक व्यामिश्रता व गुंतागुंत इतकी प्रचंड आहे की व्यवहाराच्या पातळीवर वेगवेगळ्या पातळ्यांवरचे नियम स्वायत्तच म्हणणे अधिक श्रेयस्कर. परंतु तरीही त्याचा विश्वास असतो की नुसते हात झटकून व अडचणींसमोर माघार घेऊन सध्याच्या मर्यादा म्हणजेच संक्षेपणवादाचा अटळ अपुरेपणा असे समीकरण मांडणे काही योग्य नाही.

या भूमिकेतून पाहिले तर *व्यवहारात तरी* संक्षेपणवाद व साकल्यवाद यांच्यात फार फरक भासत नाही. परंतु बरेच वेळा साकल्यवाद संक्षेपणवादापेक्षा फार वेगळा आहे असे सांगितले जाते. या दोन वादांतील मुख्य फरक म्हणजे साकल्यवादानुसार व्यामिश्रतेच्या भिन्नभिन्न पातळ्यांवरील नियमही मूलभूत मानले जातात. वरच्या पातळीवरील नियम खालच्या पातळीवरील नियमांशी सुसंगत असले पाहिजेत हे मान्य करावेच लागते. परंतु वरच्या पातळीवरील नियम खालच्या पातळीवरील नियमांतूनच उद्‌भवले पाहिजेत असे मानण्याची गरज नाही असे साकल्यवादात ठामपणे मांडले जाते. वरच्या पातळीवरील नियम निसर्गाच्या वेगळ्या तत्त्वांचा आविष्कार असतो व सर्वात खालच्या पातळीवरील नियमांनी केलेल्या आखणीवर व पायावर ह्या स्वतंत्र नवीन तत्त्वांची भर पडत जाते. स्पष्टीकरणासाठी एक उदाहरण घेऊ : युक्लिडीय भूमितीचा पाया आहे जोडलेल्या त्रिमिती अवकाशाची क्षेत्रविद्या, आणि युक्लिडीय भूमिती या पायाभूत क्षेत्रविद्येशी सुसंगत असली तरी त्यातून उगम पावत नाही. असाच काहीसा प्रकार साकल्यवाद्यांच्या वरील भूमिकेचा आहे. हे साम्य साकल्यवादाची भूमिका स्पष्ट करत असले तरी त्यातून इतर काही प्रश्न उभे राहतात.

साकल्यवाद बरोबर असेल तर सर्वात खालच्या पातळीवरचे नियम असे असणे जरूर आहे की काही प्रमाणात तरी वरच्या पातळीवरचे गुणधर्म ते अनिश्चित ठेवतील. तसे न झाल्यास अति-निश्चिततेचा प्रश्न उभा राहू शकतो आणि परिणामी वेगवेगळ्या पातळ्यांवरील नियम परस्परविरोधी निघण्याचीही शक्यता निर्माण होते. यापुढील गोष्ट म्हणजे खालच्या पातळ्यांवरील नियमांतील प्राथमिक संकल्पना आहेत हालचालींची वैशिष्ट्ये दाखविणाऱ्या : घटकांची स्थिती, वेग, ऊर्जा वगैरे. वरच्या पातळीवर कोणत्या वेगळ्या प्राथमिक संकल्पना येतील याची आपल्याला काहीच स्पष्ट कल्पना नाही.

यामुळे व्यामिश्र संहतींच्या व्यावहारिक पातळीवरील अभ्यासात संक्षेपणवादी तसेच साकल्यवादी हे दोन्ही दृष्टिकोन वरच्या पातळीवरील स्वायत्त नियमांना मान्यता देतात. मुख्य फरक येतो तो आपण त्यांना कशा प्रकारचे महत्त्व बहाल करणार यासंबंधात. संक्षेपणवादी या नियमांना दृश्यघटनात्मक वा दुय्यम मानतात (तात्त्विकदृष्ट्या हे नियम खालच्या पातळीवरील मूलभूत नियमांशी जोडलेलेच असले पाहिजेत); तर साकल्यवादी या नियमांनाच मूलभूत दर्जा बहाल करतात, आणि हे नियम खालच्या पातळीवरील नियमांपासून सिद्ध करता आले पाहिजेत असे काही बंधन मानीत नाहीत. यापैकी एक भूमिका नि:संशयपणे चुकीची आहे असे सिद्ध करणारा कोणताच पुरावा सध्यातरी आपल्याला उपलब्ध नाही. परंतु वैज्ञानिकाची जडणघडण कशा प्रकारे झाली आहे यावरून ती/तो कशा मार्गाने संशोधन करणार हे काही अंशी तरी ठरत असते. जीवशास्त्रीय घडामोडीचे स्पष्टीकरण देण्यासाठी संक्षेपणवादी वैज्ञानिक रेण्वीय जीवशास्त्राने मोकळ्या करून दिलेल्या वाटा चोखाळण्याची शक्यता असते; तर साकल्यवादी वैज्ञानिक त्याऐवजी प्रिगोजिन यांची ऱ्हासीय संरचनांची रूपावली स्वीकारून अत्यंत असंतुलित संहतींच्या प्रतिमानांत स्वयंसंघटनाचा शोध घेताना आढळून येईल. मात्र कोलाहल, अपूर्णमित आणि स्वयंसंघटन हे संक्षेपणवादाच्या विरोधात जाणारे पुरावे आहेत असा दृष्टिकोन स्वीकारणे माझ्या मते चुकीचे आहे. हे विषय म्हणजे केवळ व्यामिश्र संहतींच्या अभ्यासासाठी वापरलेले साकल्यवादी मार्ग आहेत. भविष्यात त्यांचा संबंध खालच्या पातळीवरील मूलभूत नियमांशी जोडला जाणारच नाही असे काही सांगता येत नाही.

संक्षेपणवादाचे सर्वात मोठे शक्तिस्थान मानल्या जाणाऱ्या विषयातच त्याला सर्वात कठीण आव्हान स्वीकारावे लागेल अशी खूप शक्यता आहे. एका बाजूला मूलकण भौतिकी अविरतपणे संक्षेपणवादाच्या मार्गावर दौड करत असतानाच सूक्ष्मपातळीवरील सर्व घडामोडींच्या मुळाशी असणारा पुंजसिद्धान्त मात्र दर्शवतोय की संक्षेपणवादाला गंभीर प्रश्नांना सामोरे जावे लागणार आहे. अणुसंबंधी घडामोडींबाबत पुंजसिद्धान्त प्रचंड यशस्वी झाला असला तरी संकल्पनापातळीवर तो नेहमीच गोंधळलेल्या अवस्थेत राहिला आहे. यातील मूलभूत अडचण अशी आहे की एखाद्या अणुसंहतीची स्थिती आणि ती मोजण्यासाठी वापरली जाणारी मापनक्रिया या सदोदित एकमेकीत गुंतलेल्या असतात, त्यांना अलग करता येत नाही. एखादा इलेक्ट्रॉन कणसमान वागणार की तरंगसमान ही गोष्ट तुम्ही मापन कसे घेणार यावर अवलंबून असते! निरीक्षक हा मापनक्रियेचाच एक भाग

असल्याने याचा अर्थ असा होतो की जणू काही सर्वात खालच्या पातळीवरील घटकाची (इलेक्ट्रॉनची) स्थिती त्या संहतीतील सर्वात वरच्या पातळीवरचा घटक (निरीक्षक) निश्चित करतो. प्रत्यक्षातील प्रश्न बरेच गुंतागुंतीचे आहेत, परंतु येथे आपल्या ध्यानात एक महत्त्वाची गोष्ट येते. आपण पूर्वी बघितल्याप्रमाणे संक्षेपणवाद ऊर्ध्वगामी कारणभाव मानतो - म्हणजे खालच्या पातळीवरील घटकांद्वारे वरच्या पातळीवरील गुणधर्म निश्चित करतो. पुंजसिद्धान्त कदाचित अशी सूचना देत असेल की निसर्गात अधोगामी कारणभावही असावा म्हणजे खालच्या पातळीवरील घटकांचे नियम वरच्या पातळीवरून निश्चित केले जात असावेत.

अधोगामी कारणभावाची शक्यता पुंजसिद्धान्ताहून वेगळ्या क्षेत्रात स्वतंत्रपणे सुचवलीही गेली आहे. वर म्हटल्याप्रमाणे व्यामिश्र जीवांचे एक वैशिष्ट्य संक्षेपणवादी विज्ञानाच्या क्षमतेबाहेरचे वाटते. ते म्हणजे जाणीवपूर्वक विशिष्ट हेतूने केलेल्या कृती वा स्वतंत्र इच्छाशक्तीचा वापर. यावर विचार करताना काहींनी अधोगामी कारणभाव हे निसर्गातील एक तत्त्व म्हणून स्वीकारावे अशी सूचना केली आहे. स्वतंत्र इच्छाशक्तीद्वारे कृती करण्यासाठी आत्यंतिक गुंतागुंतीच्या प्रक्रियांचे जाळे तयार होणे आवश्यक असते. अणू-रेणूंतील मूलभूत आंतरक्रियांद्वारे त्यांच्या हालचालींचे असे व्यामिश्र जाळे तयार करण्याइतपत नियमन करता येईल हे फारच अशक्यप्राय वाटते. त्यामुळे अनेकांना अधोगामी कार्यकारणभाव अधिक आकर्षक वाटतो : स्वतंत्र इच्छाशक्तीने घेतलेला निर्णय अनेक पातळ्यांच्या उतरंडीवरून खाली जात जात अखेरीस अणू-रेणूंना आपल्या आज्ञेनुसार वागायला भाग पाडतो. या कल्पना अर्थातच फार अस्पष्ट व आकारहीन आहेत; अगदी अवैज्ञानिक म्हणण्यासारख्याही आहेत. परंतु या म्हणण्यात थोडेफार तरी तथ्य असल्याचे भविष्यात आढळून आले तर मात्र विज्ञानाचा सध्या आपल्याला परिचित असलेला डोलारा पूर्णत: कोसळून पडेल.

या तसेच पुढील प्रकरणातील विषयावरील चांगले विवेचन संदर्भ 7 मध्ये उपलब्ध आहे.

वीस

बदललेली दृष्टी

या पुस्तकाच्या लिखाणामागील मुख्य उद्दिष्ट आणि विषय आहे व्यामिश्रता. व्यामिश्रता हा निसर्गनियमच आहे - साध्यासोप्या संहतीच अपवादाने आढळतात. तरीही अगदी आताआतापर्यंत विज्ञानाने, विशेषत: भौतिकी विज्ञानाने, आपले लक्ष केंद्रित केले होते ते साध्यासोप्या संहती व प्रक्रियांवर आणि त्यांच्या काल्पनिक प्रतिमानांवर - स्प्रिंगा, लंबक, बिनलवचीक (rigid) वस्तू, स्थितिस्थापक (elastic) टकरा, अर्ध-स्थितीक (quasistatic) प्रक्रिया, एकच इलेक्ट्रॉन असलेला अणू इत्यादी. हे काही अपघाताने घडलेले नव्हते. निसर्गक्रिया समजून घेण्याच्या एका पद्धतीचा, व्यूहरचनेचा तो भाग होता. साध्या रेषीय संहती हाताळण्यास सोप्या असतात आणि परस्परविरोधी सिद्धान्तांची चाचणी करून खरेखोटे ठरविण्याबाबतही त्या अधिक योग्य ठरतात. अशा संहतींच्या प्रतिमानांचा खूप तपशिलात जाऊन अभ्यास करता येतो. प्रत्यक्षातील व्यामिश्र संहती फारच अवांतर गुंतागुतीने व तांत्रिक बारकाव्यांनी भरलेल्या असतात. त्यामुळे त्यात मूलभूत नियम झाकले जातात. साध्या रेषीय संहतीत ही अवांतर गुंतागुंत टाळली जाऊन निसर्गाचा गाभा व त्यातील सर्वांत मूलभूत नियम नजरेस येतील ही अपेक्षा होती.

जवळजवळ चार शतके ही व्यूहरचना सफल ठरली. कणांच्या स्थितीगतिशास्त्राच्या नियमांनी कणसमुच्चयांचे नियम निश्चित केले. हायड्रोजन अणू, रेषीय लंबक अशा साध्या संहतींवरून शोधून काढलेले पुंजयांत्रिकीचे नियम रसायनशास्त्रातील व्यामिश्र गुंतागुंतीच्या अणू-रेणूंचे स्पष्टीकरण करण्यात उपयोगी आले. या पद्धतीला लाभलेल्या आश्चर्यकारक यशामुळे एक अलिखित मिथ्य उदयाला आले : व्यामिश्र संहतींत असे काही खास नाविन्यपूर्ण व महत्त्वाचे नसते की जे साध्या रेषीय संहतीत आढळून येत नाही. व्यामिश्र संहतींत सतत सार्वत्रिक आढळणारी अरेषीयता ही एक प्रकारची विकृती, एक बोचणारा काटा मानला जात होता - एक तर त्याकडे दुर्लक्ष करायचे वा निसर्गाच्या मुख्य रेषीय प्रतिमानांत थोडीफार ढवळाढवळ करणारी बाब म्हणून बघायचे. या प्रकारची वृत्ती सर्वत्र असूनही अभिजात रूढ विज्ञानाच्या कित्येक विभागांत अरेषीयतेने आपले डोके जिद्दीने वर काढलेच. आइन्स्टाइन यांच्या व्यापक सापेक्षतावादाचे ते एक ठळक वैशिष्ट्य होते. परंतु

तरीही एकंदरीत रेषीयतेने घडविलेली मनोवृत्ती टिकून राहिलीच. कधीकधी असेही ऐकिवात येते की भौतिकी म्हणजे दुसरे काही नाही तर केवळ काही विशिष्ट सीमास्थितींनी बद्ध असलेली अर्धा डझन रेषीय पार्शल डिफरेंशिअल समीकरणे (पॉसाँ समीकरण, लहर समीकरण, प्रसरण समीकरण, श्रोडिंगर समीकरण, डिरॅक समीकरण इ.) होत! देव कसा विचार करतो ह्याचा साक्षात्कार आपल्याला रेषीय संहती घडवून आणतात! बाकी व्यामिश्रता व अरेषीयता हे तपशील आकडेमोडीपुरतेच उपयोगाचे.

कोलाहलविज्ञानाच्या उदयानंतर पहिला महत्त्वाचा बळी गेला तो व्यामिश्रतेसंबंधित या वृत्तीचा. तिची जागा आता घेतली आहे एका बदललेल्या दृष्टीने. व्यामिश्रता ही आता स्वतंत्रपणे रस घेण्याजोगी गोष्ट गणली जाऊ लागली आहे. अरेषीयता म्हणजे केवळ रेषीयता अधिक थोडीशी तांत्रिक गुंतागुंत नव्हे. ते स्वत:चे एक वेगळेच जग आहे. त्याला स्वत:ची अशी वेगळीच अनोखी वैशिष्ट्ये आहेत, नवीन नियम आहेत आणि एक वेगळीच मर्मदृष्टी आहे, साध्या रेषीय संहतींवरून लक्षात येणाऱ्या वा समजून येणाऱ्या या गोष्टी नाहीत. ही बदललेली दृष्टी निसर्गाचा गाभाच अरेषीय आहे असे मानते.

व्यामिश्रता अंत:प्रेरणेने समजून घेणे सोपे असले तरी तिची अचूक व्याख्या करणे कठीणच आहे. हे करण्याचे अनेक प्रयत्न झाले आहेत आणि अजूनही वेगवेगळ्या स्वरूपात होत असतात. संहती व तिची हालचाल निश्चित करण्यासाठी जरूर असलेल्या माहितीच्या स्वरूपात; एन्ट्रॉपीच्या स्वरूपात; स्वैरपणाच्या स्वरूपात इत्यादी. उदाहरणार्थ A B A B A B असा सुव्यवस्थित अनुक्रम निश्चित करायला लागणारी माहिती (वा सूचनासंच) एखाद्या A W H Z C यासारख्या स्वैर अनुक्रमासाठी जरूर असणाऱ्या माहिती (वा सूचनासंचा) पेक्षा कमी असते. परंतु अजूनही स्वैरपणाची कल्पना निश्चितपणे स्पष्ट झालेली नाही. कारण एखाद्या अडाण्याला जे स्वैर वाटते ते एखाद्या विद्वानाच्या दृष्टीने नियमबद्ध असू शकेल. या प्रकारची व्यक्तिनिष्ठता वैज्ञानिक संकल्पनेला मान्य होणारी नाही. कदाचित स्वैर अनुक्रम अशी काही चीजच नसावी किंवा कदाचित, काही लोकांनी केलेल्या तर्काप्रमाणे, खराखुरा स्वैरपणा फक्त पुंजवादी घटनांतच आढळून येणारा असावा. या सर्वाचा अर्थ एवढाच की व्यामिश्रता संख्यात्मक पातळीवर मोजायची पाळी आली तर लक्षात येते की आपल्या पायाखालची जमीन काही स्थिर नाही. संगणक वैज्ञानिक या प्रश्नाबाबत 'अल्गोरिद्मिक व्यामिश्रतेची' कल्पना वापरतात. एखाद्या संहतीचे वर्णन करण्यासाठी जी माहिती पुरवावी लागते ती निर्माण करणारा अल्गोरिद्म (सूचनासंच) बनवावा लागतो व यात अनेक पायऱ्या असतात. सर्वात कमी पायऱ्या वापरून तयार केलेल्या अल्गोरिद्ममधील पायऱ्यांची संख्या त्या संहतीच्या व्यामिश्रतेशी जोडली जाते - ही 'अल्गोरिद्मिक व्यामिश्रता'. ही संकुचित व्याख्या निसर्गातील व्यामिश्रतेचे किती प्रमाणात प्रतिनिधित्व करू शकते हे काही स्पष्ट झालेले नाही.

काहीशा अधिक आकलनीय पातळीवर पाहिले तर सर्वसामान्यपणे अशी कल्पना आढळते की जेव्हा संहतीच्या मुक्त कोटींची संख्या जास्त होते तेव्हा व्यामिश्रतेचा उगम होतो. म्हणजेच त्या संहतीची स्थिती निश्चित करायला लागणाऱ्या चलांची संख्या मोठी

असते. ही कल्पना तशी योग्य वाटली तरी त्यातही संदिग्धता आहेच. एक ग्रॅम हायड्रोजन वायूपेक्षा दोन ग्रॅम हायड्रोजन वायूतील मुक्त कोटींची संख्या तसेच एन्ट्रॉपी दुप्पट असते. पण म्हणून दोन ग्रॅम हायड्रोजन एक ग्रॅमपेक्षा दुप्पट व्यामिश्र आहे असे म्हणणे हास्यास्पदच ठरेल. व्यामिश्रतेला संख्यात्मक तसेच गुणात्मक अशी दोन्ही अंगे आहेत हे उघडच आहे. यापैकी गुणात्मक व्यामिश्रता अचूक शब्दांत वर्णन करणे कठीण आहे. वरील कल्पनेची दुसरी बाजू म्हणजे साध्या, थोड्याच मुक्त कोटी असणाऱ्या संहतींचे गुणधर्मही तुलनात्मकदृष्ट्या साधेच असणार असे मानणे. कोलाहलाने याचा फोलपणा निर्विवादपणे दाखवून दिला आहे. साध्या संहतींचे गुणधर्म साधेच असतील असे काही नाही. अगदी एकमितीय अरेषीय संहतीही विश्वास बसणार नाही अशा व्यामिश्र हालचाली दाखवितात : आंदोलनकाल दुप्पटी, कोलाहल, कोलाहलीय स्थितीतील आवर्ती खिडक्या इत्यादी. साध्या व निश्चिततावादी नियमांनी बांधलेल्या संहतीदेखील अरेषीयत्वामुळे वाटेल तशा वागू लागतात.

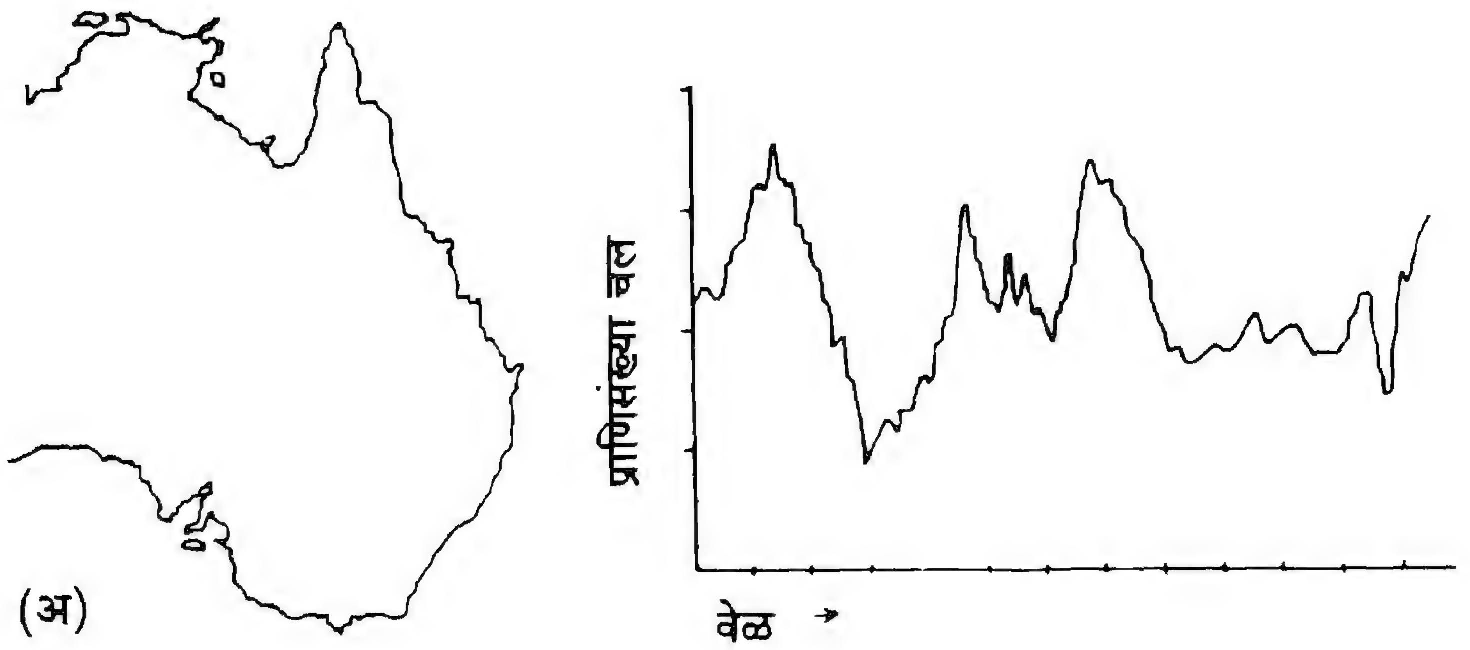
व्यामिश्रतेला असंख्य चेहरे आहेत. परंतु यातील दोन, वरवर परस्परविरोधी वाटणारे, चेहरे नेहमी आढळात येतात. व्यामिश्रतेचा एक चेहरा आहे स्वैरपणाचा. व्यामिश्र संहती वाकड्यातिकड्या, अनियमितपणे आणि अकल्पित बेभरंवशाने वागतात. अनियमितपणा काळाच्या ओघात आणि अवकाशातील रचनेत वा दोहोतही असू शकतो. संहतीच्या स्वैर वागणुकीबद्दलची वैज्ञानिकांची ठरीव प्रतिक्रिया म्हणजे त्या संहतीत वा तिच्याबाहेर स्वैर कारणांचा शोध घेणे. वारा जोराने वाहत असताना उंचावरून एखादा कागदाचा कपटा सोडला तर तो फारच वेडेवाकडे हेलकावे खात भिरभिरत जातो. येथे कागदाच्या स्वैर हालचालींचे कारण आहे वाऱ्याचे स्वैरपणे बदलणारे बल. द्रवात तरंगणाऱ्या परागकणाची नागमोडी हालचाल (ब्राउनियन हालचाल) निर्माण होते ती द्रवातील भोवतालच्या रेणूंनी त्या परागकणाला दिलेल्या स्वैर धडकांनी. लहान मुलाच्या मोडक्या खेळण्याचा आकार वेडावाकडा असतो कारण बच्चंजींनी ते खेळणे स्वैररीतीने हाताळलेले असते. थोडक्यात म्हणजे स्वैर परिणाम हे स्वैर कारणांमुळे उद्भवतात.

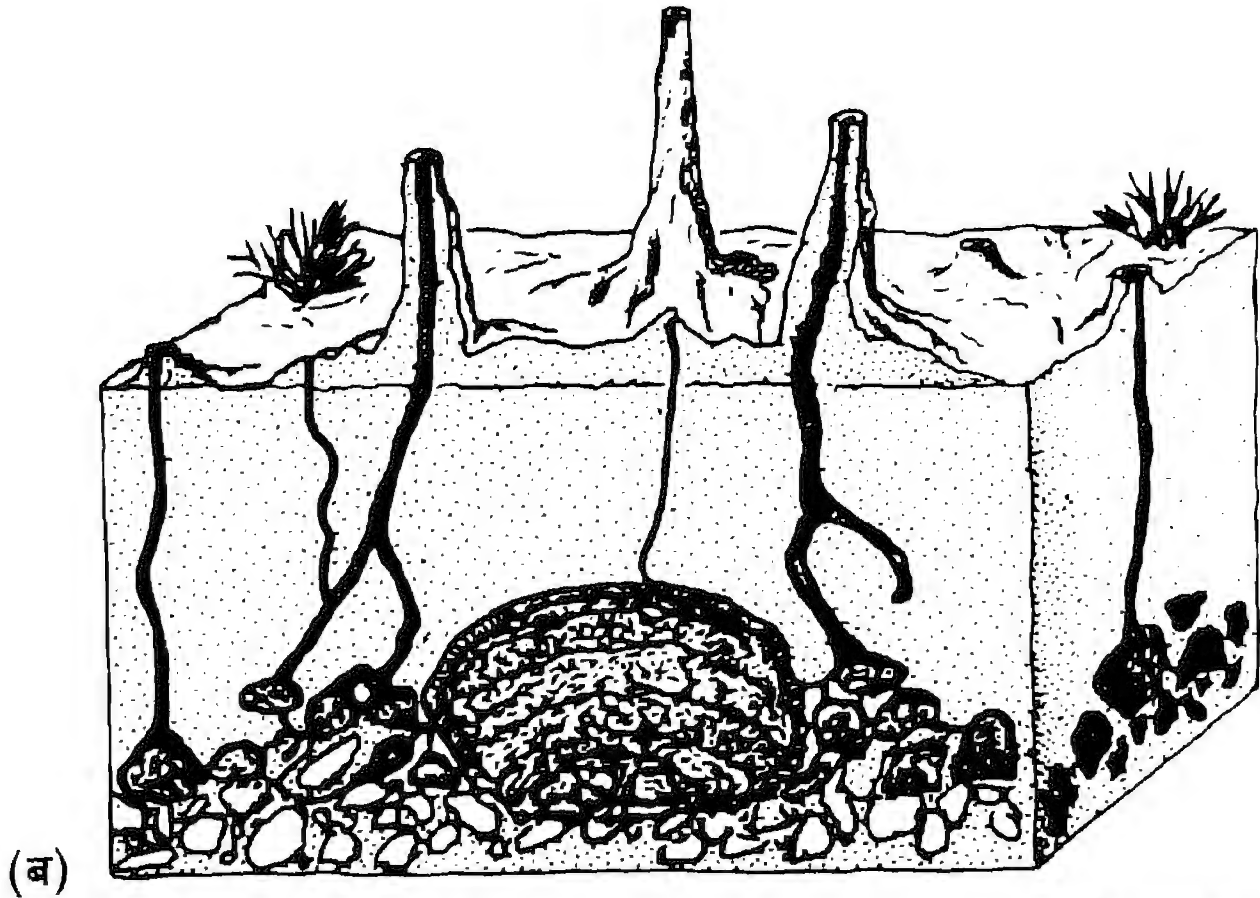
नव्या विज्ञानाने या संकल्पना आमूलाग्र बदलून टाकल्या आहेत. आपल्या आता लक्षात आले आहे की व्यामिश्रतेचा अनियमित चेहरा हा एक मुखवटा आहे आणि तो दूर सारल्यावर आत अचंबित करणारी नियमितता आढळून येते. नेहमीच नसला तरी अनेकदा स्वैरपणा खोटा असतो. निसर्गाने निर्माण केलेल्या अनेक स्वयंभू अनियमित आकारांच्या पोटी तरल सममिती दडलेली असते. मापप्रमाणातील स्वयंसमरूपता, किनारपट्ट्या, ढग, डोंगररांगा वेगवेगळ्या आकारपातळ्यांवर समरूप दिसतात. स्वयंसमरूप आकार (अपूर्णमित) सर्व प्रकारच्या प्रक्रियांत आढळतात : तुटण्याची क्रिया, एकत्रीकरण, झिरपणे, वाढ इत्यादी. येथे उपलब्ध जागा अधिक कार्यक्षमतेने वापरण्यास अनियमितता मदत करते - उदाहरणार्थ श्वासनलिकांची एकात एक गुंतलेली किचकट संरचना. याच प्रक[illegible] कालावधीतील हालचालींत आढळणाऱ्या स्वैरपणाच्या मागेही एखादी अनोखी संरच[illegible] दडली असणे शक्य आहे. एखाद्या लंबकाची हालचाल अत्यंत गुंतागुंतीची व वेडीवाक[illegible]

होते; किड्यांच्या संख्येत अचानक, वरवर तरी अकारण वाटणारे, बदल होतात; साथीच्या रोगांचे पसरणे आणि नाहीसे होणे बुचकळ्यात टाकणारे असते आणि हवामान तर नेहमीच सर्वांना कोड्यात टाकते. परंतु या सर्व गोष्टी स्वैर बदलणाऱ्या कारणांमुळेच होत नसतात. हा अंतर्गत संरचना असणारा नि वरवर मात्र स्वैर भासणारा कोलाहल असू शकतो - निश्चिततावादी नियमांतून उद्भवलेला. येथे संहतीच्या वागणुकीतील भाकीतक्षमतेचा अभाव निर्माण होतो तो आरंभस्थितीवर असणाऱ्या अतिसंवेदनाक्षम अवलंबित्वामुळे. कोलाहल आणि अपूर्णमित यांत दडलेला संदेश तसा स्पष्ट आहे. 'स्वैर परिणाम स्वैर कारणांमुळे' हे काही नेहमीच खरे नसते. वरवर स्वैर व अनियमित भासणाऱ्या घटनांमागे बऱ्याच वेळा नियमित आवर्ती भूमितीय रूपांतरे आणि निश्चिततावादी नियम असतात.

व्यामिश्रतेचा दुसरा चेहरा आहे सुव्यवस्था, संरचना आणि स्वयंसंघटन. संतुलित ऊष्मागतिकीला नेमकी याच्या उलट परिस्थिती हवी असते : संरचना लोप पावून वैशिष्ट्यहीन अव्यवस्था सर्वत्र पसरली पाहिजे. संहती थंड झाल्यावर साध्या संरचनांचा उगम येथे होऊ शकतो. परंतु संहतीला ऊर्जा व पदार्थांचा पुरवठा केला असता, विशेषत: सजीवांमध्ये, ज्या अत्यंत व्यामिश्र गतिशील संरचना आणि स्वयंसंघटन यांचा उगम होताना दिसतो तसे काही होण्यास संतुलित ऊष्मागतिकीत अजिबात वाव नसतो. व्यामिश्रतेचा हा चेहरा प्रिगोजिन यांची रूपावली एका वेगळ्याच प्रकाशात उजळून टाकते. खूप असंतुलित ऊष्मागतिकीय स्थितीत असणाऱ्या खुल्या संहती स्थलकालात व्यामिश्र, स्वयंसंघटन करणारे आकृतिबंध निर्माण करतात. ह्या 'ऱ्हासीय संरचना' पर्यावरणातून सातत्याने ऊर्जा व पदार्थ घेऊन स्वत:च्या अंतर्रचना बांधून त्या सुस्थितीत ठेवतात आणि त्याच वेळी उष्णता व अन्य टाकाऊ पदार्थ बाहेर फेकून अधिक प्रमाणात एन्ट्रॉपी पर्यावरणात सोडून ऊष्मागतिकीच्या दुसऱ्या नियमाचे पालनही करतात. 'ऱ्हासीय संरचनेची' कल्पना विश्वाची सर्जनशीलता समजून घेण्याच्या दृष्टीने महत्त्वाचे धागेदोरे पुरवते. ही सर्जनशीलता निर्जीव पदार्थांत लहान प्रमाणावर आढळून येते, तर पृथ्वीवरील जीवसृष्टीचा उगम, वाढ व उत्क्रांती यात या सर्जनशीलतेचे भव्यदिव्य स्वरूप प्रकट होते.

व्यामिश्रतेची ही दोन रूपे - कोलाहल आणि स्वयंसंघटन - परस्परविरोधी असल्याचे वरवर भासत असले तरी प्रत्यक्षात मात्र दोहोंचा उगम एकच आहे : अरेषीयता. अरेषीयतेची ही दोन रूपे आणखी एका समान धाग्याने जोडली गेली आहेत : त्यांच्यात असलेला स्वाभाविक भाकीतक्षमतेचा अभाव. कोलाहलात भाकीतक्षमतेचा अभाव उद्भवतो तो आरंभस्थितीवरील अतिसंवदेनाशील अवलंबित्वामुळे, तर स्वयंसंघटनात भाकीतक्षमतेचा अभाव येतो तो अत्यंत असंतुलित स्थितीतील संहतीच्या मार्गातील द्विभाजन बिंदूवरील अस्थैर्यामुळे. द्विभाजन बिंदूपाशी सूक्ष्म, कळून न येणारे असे पर्यावरणातील चढउतार खूपच वृद्धिंगत होतात आणि अनेक उपलब्ध वाटांपैकी कोणत्याही एका वाटेवर त्या संहतीस ढकलून देतात. विविध उपलब्ध वाटांपैकी एक वाट कोलाहलाचीही असू शकते. कधीकधी कोलाहल आणि स्वयंसंघटन यांचे साहचर्यही घडून येते. गुरुग्रहाचे वातावरण एकंदरीत कोलाहलात्मक असले तरी त्यात एक स्वयंसंघटित संहतीही आहे : मोठा लाल डाग.





आकृती 20.1 : व्यामिश्रतेचे दोन चेहरे : (अ) स्थलावकाशातील अनियमितता (किनारपट्टी) आणि कालावकाशातील अनियमितता (प्राणिसंख्येतील स्वैर बदल) यांच्यामागे नियमितता दडलेली असते; (ब) स्थल-कालावकाशातील संरचना व स्वयंसंघटन (मुंग्यांचे वारूळ).

व्यामिश्रता सर्वसाधारणपणे विशिष्टतेशी जोडली जाते. साध्या संहतीत वैश्विकता, सार्वत्रिकता आढळून येते. जसजशी व्यामिश्रता वाढत जाते तसतशी संहती अधिकाधिक वेगळे, एकमेव असे स्वरूप धारण करते. भारतीय अर्भकाची वागणूक जवळपास इंग्लंडमधील अर्भकाच्या वागणुकीसारखीच असते. परंतु वय आणि व्यामिश्रतेतील वाढीबरोबर दोघांची वर्तने परस्परांपासून अधिकाधिक वेगळी होत जातात. याबाबत कोलाहलविज्ञानाने आपल्याला आश्चर्याचा धक्का दिला आहे. भौतिक परिस्थिती वा

गणितीय गुणधर्म यांच्या दृष्टीने परस्परांशी कसलेही साम्य नसणाऱ्या व्यामिश्र संहतींचा कोलाहलाप्रत जाण्याचा मार्ग मात्र (बहुतांशी) एकसारखाच, सार्वत्रिक असतो. भरीस भर म्हणजे ही सार्वत्रिकता अचूक आणि संख्यात्मक पातळीवरची असल्याचे कळून चुकले आहे. कोलाहलासंबंधीची ही वस्तुस्थितीच वैज्ञानिकांना खोलवर भिडली आहे व त्यामुळेच हे शास्त्र इतक्या झपाट्याने पुढे आले आहे. व्यामिश्रता आणि सार्वत्रिकता एकत्र नांदू शकतात.

या नव्या विज्ञानशाखेने स्थैर्याच्या प्रश्नाबाबत आपल्या कल्पनांमध्ये घडवून आणलेला बदल फार महत्त्वाचा मानला जातो. आपल्याला ठाऊकच आहे की व्यामिश्र संहती चांगल्याच स्थिर व धट्टाकट्ट्या असतात. याचे सर्वोत्तम उदाहरण म्हणजे आपणच. माणसे म्हणजे अत्यंत व्यामिश्र जीवशास्त्रीय संरचना. इतक्या व्यामिश्र व गुंतागुंतीच्या की सभोवतालच्या सततच्या चढउतारांमुळे त्या कुव्यवस्थेच्या गर्तेतच पडल्या पाहिजेत. परंतु तसे होत नाही. मानवी वागणुकीचे आकृतिबंध कल्पनातीत गुंतागुंतीचे आहेत. त्यांना इतक्या विविध मागण्यांना तोंड द्यावे लागते की माणसाला वेडच लागावे. पण तसे होत नाही. ऱ्हासीय संरचनांची कल्पना यावर प्रकाश टाकते. द्विभाजन बिंदूपाशी आत्यंतिक अस्थिरता असली तरी द्विभाजनानंतर फुटलेल्या प्रत्येक शाखेतील स्वयंसंघटित संहती चांगलीच स्थिर असते व चढउतारांना दाद देत नाही. संरचनेचे हे स्थैर्य ऱ्हासामुळे निर्माण होते. व्यामिश्र संहतींतील ऱ्हासीय प्रक्रिया म्हणजे काही रोगट वा बोचणाऱ्या गोष्टी नव्हेत की त्यांना दडपून टाकणेच योग्य ठरावे. उलट या प्रक्रिया ऊर्जेचा काही भाग आणि बरीचशी एन्ट्रॉपी उष्णता व अन्य टाकाऊ पदार्थांच्या रूपाने पर्यावरणात फेकून देतात. त्याचबरोबर त्या पर्यावरणातील बदलांमुळे संहतीला निर्माण झालेले धोकेसुद्धा दूर सारतात. निसर्गातील स्वयंसंघटित संहतींमध्ये ऱ्हासीय प्रक्रिया सुव्यवस्था आणि स्थैर्य घेऊन येतात.

ऱ्हासाची ही भूमिका तशी विरोधाभासयुक्त वाटते, परंतु ही काही अगदीच नवी कल्पना नव्हे. ऱ्हासीय अरेषीय यांत्रिक संहती (उदा. अवमंदित चालित लंबक) स्थिर संथ स्थिती (कर्षक) दाखवितात ही गोष्ट आपल्या परिचयाची आहेच. अशी संहती आरंभी कोणत्याही स्थितीत असली तरी शेवटी आपल्या स्थिर स्थितीवरच येते. हा कर्षक प्रावस्था अवकाशातील एखादा बिंदू असतो वा एखादे बंद वलय (अंतिम आवर्तन). परंतु कोलाहलाने स्थैर्याच्या कल्पनेला एक नवीनच आकर्षक वळण दिले आहे. सर्वसाधारणपणे आपण स्थैर्याबरोबर सुव्यवस्था आणि भाकीतक्षमता जोडतोच. कोलाहलातील उघड दिसून येणारी अव्यवस्था आणि भाकीतक्षमतेचा अभाव यामुळे कोलाहल ही स्थैर्याच्या अगदी विरुद्ध टोकाची गोष्ट वाटते. परंतु तसे नाही. कोलाहल म्हणजे अस्थिरता हे समीकरण चूक आहे हे ह्या नव्या शास्त्रातील अनोख्या कर्षकाच्या संकल्पनेने दाखवून दिले आहे. कोलाहलीय संहतीच्या प्रावस्था अवकाशात शेजारी शेजारी असणाऱ्या मार्गरेषा एकमेकींपासून अत्यंत झपाट्याने दुरावत जातात आणि तरीही त्या प्रावस्था अवकाशाच्या एका विशिष्ट भागातच बंदिस्त असतात. यामुळेच कोलाहलीय कर्षक एका गुंतागुंतीच्या जाळ्याचे रूप घेतो - यात घड्यांवर घड्या असतात, एकमेकांना छेद न देणारे एकात एक

थर असतात. प्रावस्था अवकाश कार्यक्षमतेने व्यापण्याच्या या गरजेपोटीच अपूर्णमिताची निर्मिती होते. अनोख्या कर्षकाच्या संकल्पनेत कोलाहलविज्ञान आणि अपूर्णमित भूमिती एकत्र येतात. अनोख्या कर्षकाचा आकार कितीही वेडाविद्रा, विचित्र का असेना, हा कर्षक गतीच्या एकूण स्थैर्याचेच प्रतिनिधित्व करतो. कोलाहलीय संहतीची प्रारंभस्थिती कोणतीही का असेना, अखेरीस ती संहती अनोख्या कर्षकावरील कोणत्यातरी एका बिंदूवर येऊनच स्थिरावते. चढउतार व बदलांमुळे ती संहती भरकटली तरी ऱ्हासीय प्रक्रिया तिला तिच्या अनोख्या कर्षकाकडे परत खेचून आणतातच.

येथे आपण या नव्या शास्त्राने पुढे आणलेल्या नव्या विचारकल्पनांपैकी शेवटच्या व सर्वात तरल कल्पनेकडे येतो - कोलाहल स्थानिक पातळीवर अस्थिर असला तरी व्यापक सार्वत्रिक पातळीवर मात्र स्थिर असतो! आणि याच्या सार्वत्रिक आकृतिबंधाला सार्वत्रिक नियमाची गरज नसते. तो सार्वत्रिक आकृतिबंध कोलाहलाच्या अरेषीय स्थानिक नियमातच अंतर्भूत असतो. ऱ्हासीय संरचना आणि कोशकीय स्वयंयंत्रांबाबतही हीच दृष्टी लागू पडते. विशिष्ट आकाराच्या सार्वत्रिक संरचनांची निर्मिती स्थानिक अरेषीय नियमांच्या आवर्ती वापरातून होऊ शकते. दोन भिन्न वृत्तीच्या कल्पनांचा फारच महत्त्वपूर्ण मिलाफ येथे झालेला दिसून येतो.

''विज्ञानातील प्रत्येक महत्त्वाचा सिद्धान्त एक पाखंड म्हणून सुरू होतो आणि अखेरीस तो प्रस्थापित पोथीवाद बनतो.'' एका विचक्षण विचारवंताचे हे वाक्य कदाचित या नवीन उदयास येणाऱ्या विज्ञानशाखेलाही लागू पडेल. कोलाहल, अपूर्णमित आणि स्वयंसंघटन यांनी आपल्या जुन्या दृष्टिकोनात खूपच बदल घडवून आणला आहे. परंतु त्यांनी काही नव्या मिथ्यांना जन्म दिला असण्याचीही शक्यता आहे. एक गोष्ट मात्र निश्चित की भविष्यातील एका मोठ्या, अधिक व्यापक अशा अरेषीय विज्ञानाच्या मार्गावरील पहिली काही पावले कोलाहल, अपूर्णमित आणि स्वयंसंघटन दर्शवितात. निसर्गातील व्यामिश्रतेच्या गाभ्यातील रहस्यांपर्यंत काही ही नवीन विज्ञानशाखा अजूनपर्यंत पोहोचलेली नाही. परंतु आपल्या अज्ञानाच्या पडछाया याच्या प्रकाशात अधिक स्पष्ट झाल्या आहेत. भौतिकी सत्याच्या एका छोट्याशा कोपऱ्यात आता आपल्याला थोडी अधिक चांगली जाणीव झाली आहे की आपले अज्ञान कशात आहे.

शब्दार्थसूची

अनोखा कर्षक - Strange attractor : कोलाहलीय गतीशी निगडित प्रावस्था अवकाशातील एक अपूर्णमित कर्षक.

अपूर्णमित - Fractal : वेगवेगळ्या मापप्रमाणांत स्वयंसदृशता असणारी भौमितीय वस्तू - बहुधा अपूर्णांक मिती असणारी.

अभिजात भौतिकी - Classical physics : पुंजसिद्धान्त व सापेक्षतावाद यांचा आधुनिक कालखंड सुरू होण्यापूर्वीची भौतिकी सिद्धान्तरचना. कधीकधी सापेक्षतावादाची गणनाही अभिजात भौतिकीत केली जाते.

अल्पजीवी अस्थिर हालचाली - Transients : संहती आपल्या अखेरच्या समतोल स्थितीत स्थिरावण्यापूर्वी सुरुवातीच्या कालखंडात होणाऱ्या तिच्या तात्पुरत्या, बदलत्या हालचाली.

अवस्थांतर - Phase transition : पदार्थाचे एका अवस्थेतून दुसऱ्या अवस्थेत एकाएकी होणारे परिवर्तन (द्रव ते घन, अचुंबकीय ते चुंबकीय इ.).

अवकल समीकरण - Differential equation : एक चल व त्याचे विकलनांक (derivatives) (बदलाचा दर, बदलदराच्या बदलाचा दर इ.) यांचे संबंध दाखविणारे समीकरण.

अव्युत्क्रमी (उलट न फिरवली जाणारी) प्रक्रिया - Irreversible process : सभोवतालच्या वातावरणाची आरंभस्थिती बदलल्याशिवाय जी उलट फिरविता येत नाही ती प्रक्रिया.

आकर्षणपात्रे - Basins of attraction : संहतीत एकापेक्षा अधिक कर्षक असतात तेव्हा प्रावस्था अवकाश विभागले जाते. एका कर्षकाशी निगडित विभाग म्हणजे त्याचे आकर्षणपात्र. एका आकर्षणपात्रातील संहती त्या पात्राच्या कर्षकाकडे उत्क्रांत होते.

आकारजनन - Morphogenesis : गर्भाची वाढ होऊन बालकात रूपांतर होण्याची प्रक्रिया - यात मुळातील अभिन्न स्थितीतून निरनिराळे अवयव व रचना आकारत जातात.

ऊष्मागतिकी - Thermodynamics : स्थूल, दृष्टिगोचर पातळीवरील संहतीच्या भोवतालच्या परिस्थितीशी उष्णता, कार्य व पदार्थ यांच्या देवाणघेवाणीतून होणाऱ्या परस्परक्रियांचे शास्त्र.

एन्ट्रॉपी - Entropy : अव्यवस्थेचे माप; एकच स्थूलस्थिती दर्शविणाऱ्या वेगवेगळ्या सूक्ष्म

पातळीवरील रचनांच्या संख्येचा लॉगरिथम.

अंतिम कारणवाद - Teleology : संहती काही विशिष्ट अंतिम उद्देशाच्या रोखाने उत्क्रांत होतात अशा प्रकारचा, कारण आरंभाऐवजी शेवटी नेऊन ठेवणारा, दृष्टिकोन.

कर्षक - Attractor : प्रावस्था अवकाशातील असा बिंदू वा मार्गरेषा की ज्या रोखाने प्रारंभीचे क्षणिक, अस्थिर बदल विरून गेल्यावर संहतीची उत्क्रांती होते. प्रारंभीचे अस्थिर बदल आरंभस्थितीवर अवलंबून असतात; कर्षक मात्र गतेतिहासावर अवलंबून नसतात.

कालदुप्पटी - Period doubling : प्राचलांच्या विशिष्ट निर्णायक, क्रांतिक किमतीस आवर्ती हालचालीत अचानक बदल होऊन ती मूळ आंदोलनकालाच्या दुप्पट आंदोलनकाल असलेल्या हालचाली करू लागते अशी घटना.

कोलाहल (निश्चिततावादी) - Chaos (deterministic) : संहतीला लागू असणारे नियम निश्चिततावादी असूनही संहतीच्या आरंभस्थितीवरील अतिसंवेदनाक्षम अवलंबित्वामुळे होणारी अनिश्चित, बेभरवंशाची वागणूक.

खुली संहती - Open system : सभोवतालच्या वातावरणाशी ऊर्जा व पदार्थ या दोहोंची देवाणघेवाण चालू असणारी संहती.

गाऊशियन वाटप - Gaussian distribution : घंटेच्या आकाराचा सममित वक्र-सरासरी भोवतीच्या स्वैर चढउतारांमुळे सांख्यिकी प्रक्रियेत बहुधा आढळून येतो.

घातांक नियम - Power law : एखादी राशी दुसऱ्या राशीच्या घातांकाशी कशी संबंधित असते ते दाखविणारा नियम.

द्विभाजन - Bifurcation : प्राचलाची किंमत बदलली असता संहतीच्या गतिशास्त्रीय वागणुकीत एकाएकी घडून येणारा बदल; समीकरणाच्या उत्तरांच्या संख्येत एकाएकी होणारी वाढ.

निश्चिततावाद - Determinism : विज्ञानाचे नियम व प्रारंभस्थितीचे ज्ञान यांच्याद्वारे कोणत्याही संहतीचा भविष्यकाळ (आणि भूतकाळ) पूर्णपणे निश्चित करता येतो असे मानणारा दृष्टिकोन.

पुनरावृत्ती - Iteration : पुनरावृत्ती होणारी कार्यप्रणाली - यात एका पायरीवरील आकडेमोडीचा निकाल (आउटपुट) नंतरच्या पायरीवर इनपुट म्हणून वापरला जातो.

पूर्ण अलग (विविक्त) संहती - Isolated system : सभोवतालच्या वातावरणाशी कसल्याच प्रकारची देवाणघेवाण होत नसलेली संहती.

पुंजसिद्धान्त - Quantum theory : अणुपातळीवरील पदार्थमात्राच्या वागणुकीसंबंधीचा मूलभूत सिद्धान्त. यानुसार काही राशींच्या किमती पृथक असतात आणि संहतीबद्दलचे ज्ञान संभवनीयतेच्या स्वरूपाचेच असते.

पॉइन्कारे छेद - Poincare section : प्रावस्था अवकाशात मार्गरेषा आकाराचा एखाद्या अक्षातून घेतलेला छेद.

प्रावस्था अवकाश - Phase space : संहतीची गतिशास्त्रीय स्थिती निश्चित करणारी चले वापरून बनणारे गणितीय अवकाश. एका कणाचे प्रावस्था अवकाश सहा मितींचे असते - तीन सहनिर्देशक (coordinates) त्याचे स्थान दर्शविण्यासाठी तर आणखी तीन वेग दर्शविण्यासाठी लागतात.

फरक समीकरण - Difference equation : अवकल समीकरणाचे पृथक, विभक्त स्वरूप. यात चलांच्या किमती अखंडपणे न बदलता, पृथकपणे बदलतात.

बंद संहती - Closed system : सभोवतालच्या वातावरणाशी ऊर्जेची देवाणघेवाण करणारी, परंतु पदार्थाची देवाणघेवाण मात्र नसणारी संहती.

मर्यादा वा सीमा आवर्तन - limit cycle : संहतीचा आवर्ती कर्षक - याची प्रावस्था अवकाशातील मार्गरेषा बंद वलयाकृती असते.

मापप्रमाण निश्चलता - Scale invariance : लांबीचे मापप्रमाण बदलल्यानंतरही नियम वा वस्तूंचे आकार बदलत नाहीत, तो गुणधर्म.

मुक्तता कोटी - Degrees of freedom : संहतीचे वर्णन करण्यासाठी आवश्यक असणारी स्वतंत्र चले.

रेषीयता - Linearity : ज्यामुळे 'परिणाम' (विस्थापना, प्रवाह वगैरे) 'कारणांच्या' (बले, तापमानातील उतार वगैरे) थेट प्रमाणात बदलतात तो गुणधर्म.

ल्यापुनोव घातांक - Lyapunov exponent : प्रावस्था अवकाशात शेजारी असणाऱ्या मार्गरेषांतील अपसरणाचे माप. कोलाहलीय गतीत या घातांकाची किंमत धन असते.

समतोल वा संतुलन - Equilibrium : संहतीतील स्थूल पातळीवरील चले कालप्रवाहात न बदलता स्थिर राहतात अशी स्थिती. स्थितीगतिशास्त्रात याचा अर्थ संहतीवरील एकूण बल शून्य आहे असा होतो.

सापेक्षतावाद (मर्यादित) - Relativity (special) : एकसारख्या गतीने जाणाऱ्या निरीक्षकांमध्ये समतुल्यता मानण्यावर आधारित सिद्धान्त. यानुसार लांबी, काल व वस्तुमान या निरपेक्ष संकल्पना राहत नाहीत.

सापेक्षतावाद (व्यापक) - Relativity (general) : कशाही प्रकारे हालचाल करीत असलेल्या सर्व निरीक्षकांमध्ये समतुल्यता मानण्यावर आधारित सिद्धान्त. या सिद्धान्तात न्यूटनच्या गुरुत्वाकर्षण सिद्धान्ताचे व्यापकीकरणही आहे.

सार्वत्रिक नियम - Global law : संहतीच्या वेगवेगळ्या भागांतील रचना व गुणधर्म यांना जोडणारा नियम.

स्थानिक वा स्थानीय नियम - Local law : एखाद्या क्षेत्रातील एका बिंदूवरील राशींच्या किमती व त्याच बिंदूवरील त्यांच्या बदलांचे दर यांच्यातील संबंध जोडणारा नियम.

स्थूल वा दृष्टिगोचर प्रमाण - Macroscopic scale : सर्वसाधारण आकाराच्या वस्तूंचे प्रमाण.

सूक्ष्म वा सूक्ष्मदर्शीय प्रमाण - Microscopic scale : अणू-रेणूंच्या पातळीवरील फारच लहान, दृष्टिअगोचर प्रमाण.

संदर्भसूची

या विषयावर भरपूर साहित्य उपलब्ध असून त्यात सतत झपाट्याने भर पडत आहे. खाली दिलेली पुस्तकांची यादी या साहित्याचा एक छोटासा नमुना आहे. हे पुस्तक लिहिताना लेखकावर प्रत्यक्ष वा अप्रत्यक्षपणे ज्या पुस्तकांचा प्रभाव पडला ती या यादीत सामील केलेली आहेत.

1. अब्राहम, आर. आणि शॉ, सी. : *डायनॅमिक्स : द् जॉमेट्री अव बिहेवियर,* एरियल प्रेस, सांताक्रूझ, 1982.
2. काय, बी. : *केऑस अँड कॉम्प्लेक्सिटी,* व्हीसीएच, न्यूयॉर्क, 1993.
3. कॅमबेल, ए. : *अप्लाइड केऑस थिअरी,* ॲकडॅमिक प्रेस, सान दिएगो, 1993.
4. ग्लीक, जे. : *केऑस,* व्हायकिंग, न्यूयॉर्क, 1987.
5. टरकॉट, डी. : *फ्रॅक्टल्स अँड केऑस इन् जिऑलॉजी अँड जिओफिजिक्स, केंब्रिज युनिव्हर्सिटी प्रेस, केंब्रिज* 1992.
6. टॉमसन् जे. आणि स्टिवर्ट, एच. : *नॉन लिनिअर डायनॅमिक्स अँड केऑस,* वायली, न्यूयॉर्क, 1986.
7. डेव्हिस, पी. : द् *कॉस्मिक ब्ल्यूप्रिंट,* सायमन आणि शुस्टर, न्यूयॉर्क, 1988.
8. डेव्हिस, पी. आणि हर्श, आर. : *द् मॅथेमॅटिकल एक्स्पिरियन्स,* हॉटन, मिफीन, बॉस्टन, 1981.
9. डॉकिन्स, आर. : *द् ब्लाइंड वॉचमेकर,* लाँगमन, लंडन, 1986.
10. निकॉलिस, जी. आणि प्रिगॉजिन, आय. : *सेल्फ ऑर्गनायझेशन इन नॉनइक्विलिब्रियम सिस्टम्स,* वायली, न्यूयॉर्क, 1977.
11. पेस, ए. : *इनवर्ड बाउंड,* क्लरेंडन प्रेस, ऑक्सफर्ड, 1986.
12. पेस, ए. : *सट्ल इज द् लॉर्ड,* ऑक्सफर्ड युनिव्हर्सिटी प्रेस, ऑक्सफर्ड, 1982.
13. पेन्रोज, आर. : *द् एंपरर्स न्यू माइंड,* ऑक्सफर्ड युनिव्हर्सिटी प्रेस, ऑक्सफर्ड, 1989.
14. प्रिगोजिन, आय. : *फ्रॉम बीइंग टू बिकमिंग,* फ्रीमन, सान फ्रान्सिस्को, 1980.
15. प्रिगोजिन, आय. आणि स्टेंगर्स, आय. : *ऑर्डर आउट ऑफ केऑस,* हाइनमन, लंडन, 1984.
16. बार्नस्ले; एम. : *फ्रॅक्टल्स एव्हरीवेअर,* ॲकॅडेमिक प्रेस, न्यूयॉर्क 1988.
17. बेकर, जी. आणि गोलब, जे. : *केऑटिक डायनॅमिक्स,* केंब्रिज युनिव्हर्सिटी प्रेस, 1990.

18. मँडेलब्रॉट, बी. : *द् फ्रॅक्टल जॉमेट्री अव नेचर,* फ्रीमन, सान फ्रान्सिस्को, 1982.

19. रिक्टर, पी. आणि पेटजेन, एच. : *द् ब्यूटी अव फ्रॅक्टल्स,* स्प्रिंगर, बर्लिन आणि न्यूयॉर्क, 1985.

20. सिमॉन्स, जी. : *डिफरेन्शियल इक्वेशन्स,* टाटा मॅकग्रॉहिल, नवी दिल्ली, 1974.

21. श्रोएडर, एम. : *फ्रॅक्टल्स, केऑस, पॉवर लॉज,* फ्रीमन, न्यूयॉर्क, 1991.

अभ्यासनिबंध आणि लेख

22. कुलकर्णी. एस. एस., कुमार, अरविंद : *इंटरॲक्टिव्ह मार्कोव्हियन मॉडेल्स अव प्रोग्रेसिव्ह ट्रेंडस्,* जर्नल अव मॅथेमॅटिकल सॉशॉलॉजी, गॉर्डन आणि ब्रीच, न्यूयॉर्क, 14,45,1989.

23. क्रचफिल्ड, पी., फार्मर, जे., पॅकार्ड, एन. आणि शॉ, आर. : *केऑस* सायंटिफिक अमेरिकन, 255,46,1986.

24. कँडॅनॉफ, एल. : *रोडस् टू केऑस,* फिजिक्स टुडे, डिसेंबर 1983.

25. फायगनबाउम, एम. : *क्वांटिटेटिव्ह युनिव्हर्सलिटी फॉर अ क्लास अव नॉन लिनिअर ट्रान्सफॉर्मेशन्स,* जर्नल अव स्टॅट फिजिक्स, 19, 25, 1978.

26. फोर्ड, जे. : *हाऊ रॅंडम इज अ कॉइन टॉस?* फिजिक्स टुडे, एप्रिल 1983.

27. मे, आर. : *सिंपल मॅथमॅटिकल मॉडेल्स विथ व्हेरी कॉम्प्लिकेटेड डायनॅमिक्स,* नेचर 261, 459, 1976.

28. लॉरेन्झ, इ. : *डिटर्मिनिस्टिक नॉन-पिरिअडिक फ्लो,* जर्नल अव ॲटमॉसफेरिक सायन्सेस, 20, 130, 1963.

सूची